RELATIVITÉ RESTREINTE

Bibliographie

[1] cours persos

[2] Relativité restreinte, Grossetête

[3] Relativité restreinte, Semay, Silvestre-Brac

[4] Mécanique , BFR

[5] Introduction à la relativité, Langlois

[6] Relativité, fondements et applications, Perez

I Cinématique relativiste (voir [1], [2], [3])

Les lois de l'électromagnétisme et celles de la mécanique de Newton fonctionnent bien séparément mais pas si on les combine. En effet, les lois de la dynamique sont invariantes par la transformation de Galilée mais pas les lois de Maxwell. Il est donc nécessaire d'établir un nouveau formalisme pour pouvoir concilier les deux. Le but n'étant pas de repartir de zéro, mais d'adapter les relations existantes en mécanique Newtonienne. Ce nouveau formalisme porte le nom de la relativité restreinte.

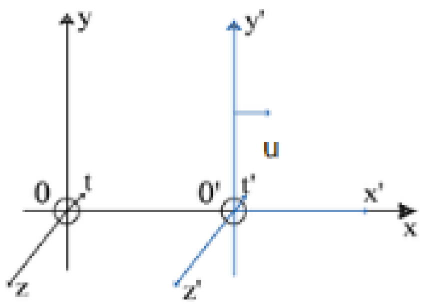
1) Cadre de la relativité restreinte

Rappels :

<u>Référentiel</u> : observateur muni d'une horloge pour mesurer des durées et d'un système de référence pour repérer des distances.

<u>Référentiel galiléen</u> : référentiel dans lequel le centre de masse d'un système isolé est au repos ou en translation rectiligne uniforme.

Transformation de Galilée :



Pour deux référentiels R et R' en translation rectiligne uniforme à la vitesse v, les relations entre les coordonnées des deux référentiels sont : $t' = t$; $x' = x - vt$; $y' = y$ et $z' = z$.

Remarque : les durées mesurées sont identiques dans tous les référentiels : le temps est absolu en relativité galiléenne.

Limites : la relativité galiléenne prédit une vitesse de la lumière dépendant du référentiel.

Expériences : Fizeau (la vitesse de la lumière ne vérifie pas la composition des vitesses galiléennes) et Michelson-Morlay (la vitesse de la lumière est constante quel que soit le référentiel).

Il s'agit donc de considérer une nouvelle transformée laissant invariante la vitesse de la lumière. Nous avons besoin de la relativité restreinte.

Postulats de la relativité restreinte :

- Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens
- La vitesse de la lumière ne dépend pas du référentiel d'étude, ni de la source qui l'émet. Dans le vide, $c = 299792458\ m.s^{-1}$

En relativité restreinte, il s'avère que l'espace et le temps sont couplés.

L’espace-temps, ou espace-temps de Minkowski est constitué d’un ensemble de points. Dans cet espace, un évènement est caractérisé par le lieu et l’instant auquel il se produit. A(x, y, z, t) défini un évènement dans un repère défini. On se place alors dans un espace à 4 dimensions. Un évènement est un point de cet espace. Une paire ordonnée d’ évènements permet de définir un vecteur dans l’espace-temps, c’est-à-dire un élément d’un espace vectoriel associé à cet espace, appelˊe quadrivecteur.

Au mouvement d’une particule on fait correspondre une ligne de cet espace que l’on appelle <u>ligne d’univers</u>.

Le carré de l’intervalle entre deux évènements quelconques est un scalaire invariant par tout changement de référentiel galiléen. On considère deux évènements $A(x_A, y_A, z_A, t_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B, t_B)$.

$(\Delta s)^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2 = cste$

L’intérêt d’avoir un invariant est de pouvoir mesurer des distances dans l’espace de Minkowski.

On distingue 3 types de distances dans l’espace-temps :

- $(\Delta s)^2 > 0$: l’intervalle est de genre temps : correspond à deux évènements pouvant être reliés par un phénomène de vitesse inférieure à c. Il peut donc y avoir un lien causal entre les évènements et ce dans tout référentiel car $(\Delta s)^2$ est un invariant. La causalité est conservée par changement de référentiel. On définit une durée propre indépendante du référentiel :

$$\tau = \frac{(\Delta s)^2}{c}$$

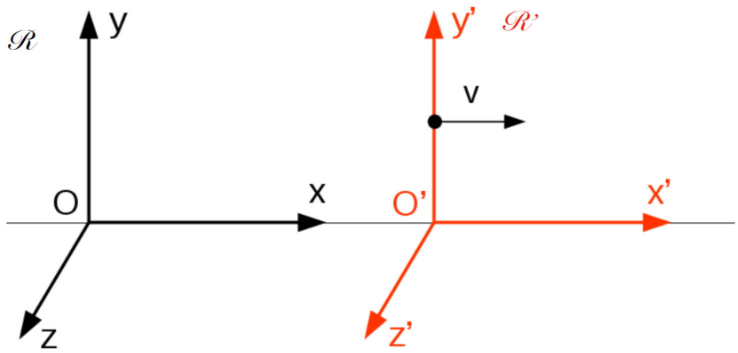
La durée propre entre deux évènements correspond à la durée mesurée dans un référentiel où les évènements ont lieu au même point d’espace, c’est-à-dire une durée mesurée par une horloge immobile.

- $(\Delta s)^2 = 0$: l’intervalle est de genre lumière : correspond à deux évènements pouvant être reliés seulement par un signal lumineux, et ce dans tous les référentiels galiléens.
- $(\Delta s)^2 < 0$: l’intervalle est de genre espace : correspond à deux évènements ne pouvant être reliés que par un phénomène plus rapide que la lumière. Les deux évènements sont considérés comme ne pouvant être en relation causale.

On peut alors se représenter l’espace-temps comme délimité par un cône de lumière en chaque pont de l’hypersurface du présent (de dimension 3).

Nous allons maintenant définir les transformations permettant de passer d’un référentiel à l’autre en relativité restreinte.

2) Transformation de Lorentz



On considère deux référentiels R et R'. R' est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à R à la vitesse $V\overrightarrow{e_x}$. La transformée de Lorentz est :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Avec $\beta = \frac{V}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ le coefficient de Lorentz.

Remarque : le temps n'est plus universel

Il découle de cette transformation une nouvelle composition des vitesses. En différentiant par rapport au temps, on obtient : $cdt' = \gamma(cdt - \beta dx)$ et $dx' = \gamma(-\beta cdt + dx)$

On obtient : $v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$, avec v_x et v_x' les vitesses instantanées selon x dans les référentiels R et R'.

On peut remarquer que si $v_x = c$, alors $v_x' = c$ également : on retrouve bien l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel.

Si V << c, on retrouve la transformation de Galilée dans le cade de la mécanique newtonienne.

Conséquences :

- Longueur propre : longueur d'un objet mesurée dans le référentiel où il est immobile

On considère une règle de longueur $\Delta x' = x_2' - x_1'$, immobile dans R' se déplaçant suivant l'axe Ox à une vitesse V par rapport au référentiel R. On veut connaître la longueur Δx mesurée dans R au même temps t.

$\begin{cases} x_1' = \gamma(x_1 - Vt) \\ x_2' = \gamma(x_2 - Vt) \end{cases}$ donc $\Delta x = \frac{\Delta x\prime}{\gamma}$

Comme $\gamma > 1$, $\Delta x < \Delta x'$: il y a contraction des longueurs : vu de R, une règle en mouvement paraît plus courte.

- Temps propre : comme on l'a vu précédemment, c'est l'intervalle de temps séparant deux indications d'une même horloge dans le référentiel où elle est au repos.

On considère une horloge immobile dans R' au point x', en mouvement suivant l'axe Ox à une vitesse V par rapport à R. Cette horloge mesure une durée $\Delta t' = t_2' - t_1'$ au même point x'.

$$\begin{cases} ct_1 = \gamma(ct'_1 + \frac{V}{c}x') \\ ct_2 = \gamma(ct'_2 + \frac{V}{c}x') \end{cases}$$ donc Δt = γ Δt'

Comme γ > 1, Δt > Δt' : il y a dilatation des durées : vu de R, le temps paraît plus long que celui mesuré dans R'.

Paradoxe des jumeaux de Langevin : En 1911 au congrès de Bologne, Paul Langevin propose une expérience de pensée mettant en jeu deux jumeaux dont l'un reste sur Terre et l'autre fait un voyage aller-retour dans l'espace en fusée à une vitesse proche de celle de la lumière. D'après le phénomène de dilatation des durées, pour celui qui est resté sur Terre la mesure de la durée du voyage doit être plus grande que pour celui qui est parti dans l'espace. A son retour, le jumeau resté sur Terre doit donc être plus vieux que lui. Toutefois, si on considère que les référentiels de la Terre et de la fusée sont galiléens, le jumeau qui voyage est en droit de considérer que c'est son frère et la Terre qui s'éloignent à grande vitesse de lui. Il pourrait donc conclure que c'est son frère, resté sur Terre, qui est plus jeune que lui à la fin du voyage. C'est le paradoxe des jumeaux (ou paradoxe des horloges) qui semble montrer que la dilatation des durées n'est en fait qu'illusoire comme le pensaient de nombreux physiciens à cette époque. Pourtant, des confirmations expérimentales (comme la durée de vie des muons ou l'expérience de Hafele et Keating) montrent que cet effet de dilatation des durées est bien réel et mesurable. La levée de ce paradoxe est due au fait que le référentiel de la fusée n'est pas toujours galiléen, notamment dans les phases de demi-tour et d'accélération (un calcul de relativité générale montre que ces phases d'accélérations n'introduisent pas de décalages temporels significatifs). Les situations des jumeaux n'est donc pas symétrique car le jumeau sur Terre est resté dans son même référentiel galiléen, contrairement au jumeau dans la fusée, qui a changé de référentiel.

Ex : trajet en RER depuis Paris

V = 80 km.h^{-1}, γ = 1, $\tau = \frac{t}{\gamma}$, $t - \tau = t(1 - \sqrt{1-\beta^2} = \frac{t\beta^2}{2}$, si on fait le trajet 6 fois (3 aller-retours, 18 min par trajet) : on gagne 18ps.

Lorsqu'on étudie un système qui possède une vitesse proche de celle de la lumière, les effets relativistes ne sont pas négligeables. La cinématique relativiste est une nouvelle théorie du mouvement qui implique que les durées varient selon les référentiels. C'est un effet dont on tient compte aujourd'hui dans les GPS. La relativité permet d'expliquer de nombreux phénomènes que l'on ne pourrait pas décrire et comprendre avec la mécanique newtonienne, typiquement la relativité générale permet d'expliquer la précession de Mercure.

II Dynamique relativiste (voir [1], [4], [5], [6])

Les lois de la dynamique newtonienne (le principe fondamental de la dynamique et le théorème de l'énergie cinétique) ne sont applicables uniquement à des systèmes ayant des vitesses très inférieures à celle de la lumière.

L'objectif de ce cours sera d'établir les lois de la dynamique relativistes applicables à des particules relativistes, et qui devront être invariantes par transformation de Lorentz et permettre également de retrouver les lois classiques aux faibles vitesses.

1) Principes de la dynamique relativiste

a) Quadrivecteurs vitesse et impulsion

On considère une particule relativiste de masse propre m_0. On note $\tilde{X} = (ct, \vec{r})$ son quadrivecteur position et $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ sa vitesse dans le référentiel du laboratoire.

On définit le quadrivecteur vitesse par : $\widetilde{U} = \frac{d\tilde{X}}{d\tau}$, avec $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$

γ est le facteur de Lorentz, donné par : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

On a donc : $\widetilde{U} = (\gamma c, \gamma\vec{v})$

Le quadrivecteur impulsion s'écrit : $\tilde{P} = m_0\widetilde{U} = m_0(\gamma c, \gamma\vec{v})$

$$\tilde{P}^2 = (m_0\gamma c)^2 - (m_0\gamma v)^2 = (m_0 c)^2$$

b) Énergie relativiste

On s'intéresse à la composante spatiale du quadrivecteur impulsion.

Si $|\vec{v}| \ll c$, $m_0\gamma\vec{v} \approx m_0\vec{v} = \overrightarrow{p_{classique}}$

Pour la composante temporelle de $\tilde{P}$, Si $|\vec{v}| \ll c$, $m_0\gamma c \approx m_0 c\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) = \frac{1}{c}(m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2})$

Donc $m_0\gamma c \approx \frac{1}{c}\left(E_{masse} + E_{c,classique}\right) = \frac{E}{c}$

m_0c^2 est l'énergie de masse de la particule, c'est-à-dire l'énergie que lui confère sa masse (d'après le principe d'équivalence masse-énergie introduit par Einstein, il s'agit de l'énergie de la particule au repos).

On peut donc écrire : $E_c = m_0(\gamma - 1)c^2$ et $\tilde{P} = (\frac{E}{c}, \vec{p})$

Donc $\tilde{P}^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (m_0 c)^2$

c) Équations du mouvement

Par analogie avec la mécanique classique, on définit le quadrivecteur force : $\tilde{F} = \frac{d\tilde{P}}{d\tau} = (\frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt}, \gamma\frac{d\vec{p}}{dt})$

Si $|\vec{v}| \ll c$, on retrouve $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

En dérivant $\tilde{P}^2$ par rapport à τ, on obtient : $m_0\gamma(c, \vec{v}).\left(\frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt}, \gamma\frac{d\vec{p}}{dt}\right) = 0$

Ainsi, $\frac{dE}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$

Finalement, $\tilde{F} = \left(\frac{\gamma}{c}\vec{F}.\vec{v}, \gamma\vec{F}\right) = \frac{d\vec{P}}{d\tau}$

On obtient donc le principe fondamental de la dynamique relativiste et le théorème de l'énergie cinétique relativiste. L'intérêt d'une équation quadrivectorielle est de pouvoir passer d'un référentiel galiléen à un autre par transformation de Lorentz et de laisser ces lois invariantes.

2) Mouvement dans un champ électromagnétique

a) Particule dans un champ électrique

On considère une particule de masse propre m_0 et de charge q initialement au repos et soumise à une différence de potentiel U.

En mécanique classique, le théorème de l'énergie cinétique donne : $\Delta E_c = qU$, soit $v = \sqrt{\frac{2qU}{m_0}}$, ce résultat n'est valable que si v << c.

En dynamique relativiste : $\Delta E_c = m_0(\gamma - 1)c^2 = qU$

Donc $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{qU}{m_0 c^2} + 1$

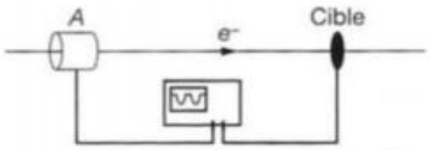
Ce qui donne : $v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1+\frac{qU}{m_0 c^2})^2}}$

Ce résultat montre que si U augmente, v tend vers la vitesse de la lumière c (sans jamais la dépasser). De plus, si $U \ll \frac{m_0 c^2}{q}$, on retrouve le résultat en mécanique classique.

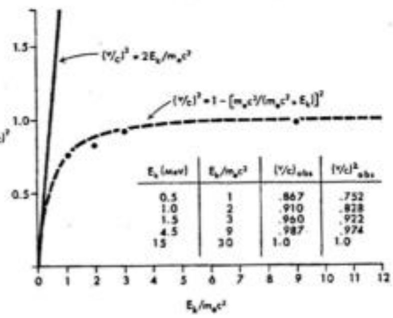
Dans les accélérateurs, les particules sont accélérées avec des différences de potentiel de l'ordre du MV, ce qui donne pour un électron v ≈ 0,94 c.

Cette vitesse limite pour les particules accélérées a été mise en évidence par Bertozzi en 1964.

Dans son expérience, les électrons sont d'abord accélérés par une tension variant entre 0,5 et 15 MV dans un accélérateur. Un anneau est placé à la sortie de l'accélérateur et permet de détecter le passage des électrons via un oscilloscope. Les électrons atteignent ensuite une cible en aluminium, et leur arrivée sur cette dernière est également détectée à l'oscilloscope. Connaissant la distance entre l'anneau et la cible et l'intervalle de temps correspondant au passage des électrons grâce à l'oscilloscope, Bertozzi en a déduit la vitesse des électrons en fonction de la tension accélératrice. Il constate que la vitesse des électrons ne dépasse jamais c, et que ses points expérimentaux suivent la courbe donnée par l'équation précédente.



Dispositif expérimental simplifié utilisé par Bertozzi



Résulats de l'expérience

b) Particule dans un champ magnétique

On considère la même particule, soumise cette fois-ci à un champ magnétique $\vec{B}$ que l'on suppose uniforme et constant (pour ne pas avoir à considérer de champ électrique induit).

D'après les équations de la dynamique relativiste, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v}\wedge\vec{B} \\ \dfrac{dE}{dt} = (q\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v} \end{cases}$$

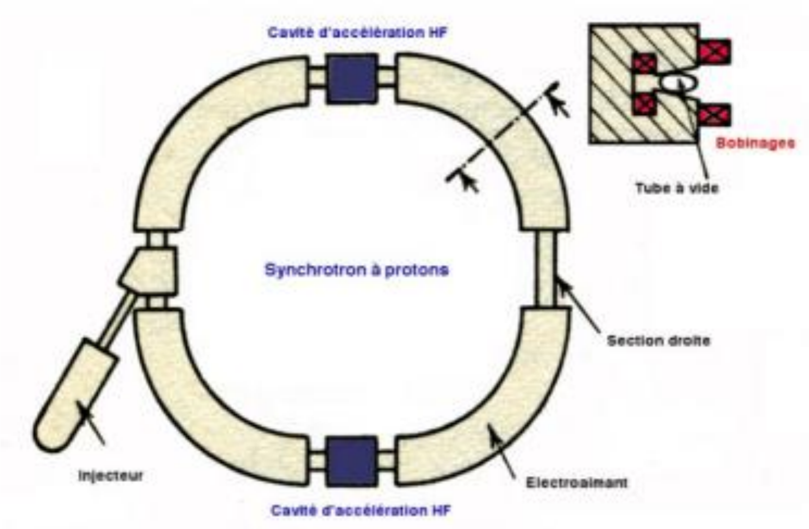
Ainsi E est constant, tout comme γ : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$

Les calculs sont donc les mêmes qu'en mécanique classique. Par exemple si la vitesse initiale est orthogonale au champ magnétique, la trajectoire sera circulaire dans le plan orthogonal au champ magnétique, et la norme du vecteur vitesse sera constante. Le rayon de la trajectoire est $R = \frac{\gamma m_0 v}{qB}$, la pulsation est $\omega = \frac{qB}{m_0}$. Le rayon et la pulsation dépendent de γ, donc de v.

Dans les accélérateurs de particules, on utilise le synchrotron pour faire acquérir de l'énergie aux particules avant de les collisionner. Dans un synchrotron, les particules sont accélérées après leur passage dans des cavités accélératrices par le biais d'une différence de potentiel, avant d'être soumises à un champ magnétique pour leur donner une trajectoire circulaire de rayon constant.

Pour maintenir le rayon de cette trajectoire constant, le champ magnétique doit être ajusté, puisqu'en effet, nous venons de voir que le rayon augmente quand la vitesse de la particule augmente.

L'énergie acquise par la particule dans un synchrotron peut actuellement atteindre le TeV, alors que dans un cyclotron, elle ne dépasse pas la centaine de MeV.



3) Collisions

a) Lois de conservation

Pour une collision du type 1 + 2 → 3 + 4, on peut écrire la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie :

$$\begin{cases} \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_3} + \overrightarrow{p_4} \\ E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \end{cases}$$

On peut le réécrire : $\widetilde{P_1} + \widetilde{P_2} = \widetilde{P_3} + \widetilde{P_4}$

Nous allons voir deux exemples de collisions.

b) Désintégration

On considère la réaction suivante : $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

Les pions sont des particules prédites par Yukawa en 1935 et découvertes en 1947, les muons ont été découverts en 1936, les neutrinos ont été découverts en 1956.

Sachant que $m_\pi c^2 = 139{,}6$ MeV, $m_\mu c^2 = 105{,}7$ MeV et $m_\nu c^2 \approx 0$, on cherche à déterminer les énergies cinétique du muon et du neutrino, $E_{c,\mu}$ et $E_{c,\nu}$.

$\widetilde{P_\pi} = \widetilde{P_\mu} + \widetilde{P_\nu}$, donc $\widetilde{P_\nu}^2 = \left(\widetilde{P_\pi}^2 - \widetilde{P_\mu}^2\right) = \widetilde{P_\pi}^2 + \widetilde{P_\mu}^2 - 2\widetilde{P_\pi}.\widetilde{P_\mu} = 0$

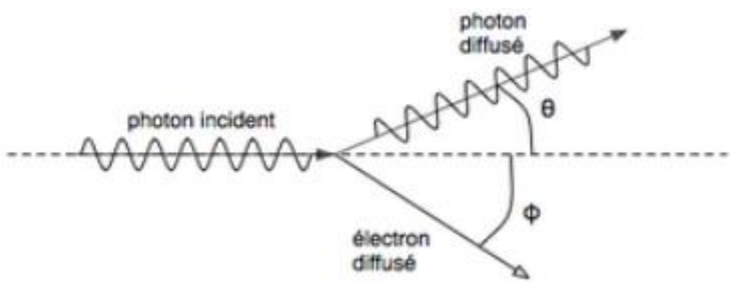
Or, $\widetilde{P_\pi} = (m_\pi c, \overrightarrow{0})$ (le pion est au repos) et $\widetilde{P_\mu} = (\frac{m_\mu c^2 + E_{c,\mu}}{c}, \overrightarrow{p_\mu})$

Donc $E_{c,\mu} = \frac{(m_\pi c^2 - m_\mu c^2)^2}{2 m_\pi c^2} = 4{,}1 MeV$

De plus, il y a conservation de l'énergie : $E_\pi = E_\mu + E_\nu$

$E_\nu = E_{c,\nu} = E_\pi - E_\mu$ donc $E_{c,\nu} = m_\pi c^2 - \left(m_\mu c^2 + E_{c,\mu}\right) = 29{,}8 MeV$

c) Effet Compton



L'effet Compton correspond à la diffusion d'un photon sur un électron libre au repos, provocant l'augmentation de la longueur d'onde du photon incident. On peut calculer cette variation de la longueur d'onde entre le photon diffusé γ' et le photon incident γ :

$\widetilde{P_\gamma} + \widetilde{P_e} = \widetilde{P_{\gamma'}} + \widetilde{P_{e'}}$ donc $\widetilde{P_{e'}}^2 = (\widetilde{P_e} + \widetilde{P_\gamma} - \widetilde{P_{\gamma'}})^2$

Or, $\widetilde{P_e}^2 = \widetilde{P_{e'}}^2 = (m_e c)^2$ et $\widetilde{P_\gamma}^2 = \widetilde{P_{\gamma'}}^2 = 0$

Donc $\widetilde{P_\gamma}.\widetilde{P_{\gamma'}} = \widetilde{P_e}.(\widetilde{P_\gamma} - \widetilde{P_{\gamma'}})$

$\widetilde{P_e} = (m_e c, \overrightarrow{0})$, $\widetilde{P_\gamma} = (\frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\lambda}\overrightarrow{u_\gamma})$, $\widetilde{P_\gamma} = (\frac{h}{\lambda'}, \frac{h}{\lambda'}\overrightarrow{u_{\gamma'}})$ et $\overrightarrow{u_\gamma}.\overrightarrow{u_{\gamma'}} = \cos(\theta)$

Finalement, $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos(\theta))$

On appelle $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ la longueur d'onde de Compton (2,4 pm)

La longueur d'onde du photon diffusé est donc augmentée. Cela peut s'interpréter par le fait que le photon cède de l'énergie à l'électron (si ce dernier est faiblement lié à l'atome, ce qui lui permettra d'être mis en mouvement) : or l'énergie d'un photon est inversement proportionnelle à sa longueur d'onde, d'où ce résultat.

Cette variation de longueur d'onde entre le photon incident et le photon diffusé a été vérifié expérimentalement par Compton, et lui a valu le prix Nobel en 1927.

Cette expérience met en valeur à la fois le caractère relativiste du photon en tant que particule se déplaçant à la vitesse c, mais également son caractère ondulatoire, puisqu'on peut lui associer une longueur d'onde.

En physique des particules **(voir physique des particules)**, il existe également d'autres lois de conservation liées aux nombres quantiques intrinsèques aux particules. Cela permet notamment la prédiction de nouvelles particules, avant leur éventuelle détection dans les accélérateurs.