

PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT ET DE DIFFUSION

Bibliographie

- [1] cours persos
- [2] H-prépa Thermodynamique
- [3] Les mille et une questions en prépa, Garing
- [4] Thermodynamique, Diu
- [5] Thermodynamique, Olivier, Gié
- [6] Physique statistique, Diu
- [7] <https://youtu.be/YKm-NNdPgWE>
- [8] <https://youtu.be/1XvAR18-1eI>
- [9] BFR, EM 3 : Induction et Ondes EM, chapitre 12
- [10] Cap prépa PC
- [11] H Prépa, Ondes, p165, p169-171
- [12] Sextant, Optique Expérimentale, p273-277
- [13] https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_de_Mie
- [14] agrégation interne physique-chimie 2015
- [15] http://www.physique-quantique.wikibis.com/diffusion_raman.php
- [16] CEREN 2012, Les chiffres clés du bâtiment, édition 2013, ADEME
- [17] Ondes mécaniques et diffusion, Garing

En thermodynamique on a défini les grandeurs caractéristiques d'un système (entropie, température, pression, potentiel chimique...) à l'équilibre. Pourtant les situations qu'on observe sont en majorité hors équilibre. À commencer par le corps humain : lorsqu'il fait froid dehors le corps reste à 37 °C : on n'est pas en équilibre thermique avec l'extérieur. Sinon on serait en hypothermie tout le temps... Par contre le système va chercher à aller vers un état d'équilibre, pour cela on va avoir mise en place de phénomènes de transport.

I Diffusion de particules (voir [1], [2], [3], [4])

La diffusion est un phénomène de transport des particules sans mouvement macroscopique. Il se caractérise par une migration spontanée des particules des endroits où elles sont le plus concentrées vers ceux où elles le sont le moins. Le phénomène cesse à l'équilibre. Si on considère par exemple une bouteille de parfum, les molécules odorantes finissent par emplir la pièce, des molécules ont quitté le flacon et se sont déplacées dans l'air sans mouvement de ce dernier.

1) Grandeurs physiques

a) Densité de particules

On cherche à connaître l'évolution locale de la population de l'espèce qui migre : on raisonne à l'échelle mésoscopique. On considère un volume mésoscopique élémentaire dt centré au point M . On note $n(M,t)$ la densité de particules (nombre de particules par unité de volume). Le nombre de particules contenues dans dt est : $dN(M,t) = n(M,t)dt$

b) Densité de courant de particules

surface fermée : surface qui sépare l'univers en deux, pour passer d'un domaine à l'autre il faut traverser la surface

Pour les surfaces ouvertes, on se limite à celles qui sont délimitées par un contour (courbe continue fermée). Pour orienter une surface ouverte, on oriente le contour (choix arbitraire) et on oriente alors la surface conformément à la règle de la main droite. On note $\vec{dS} = dS\vec{u}$.

Une surface fermée est systématiquement orientée vers l'extérieur.

On note $\vec{j}(M, t)$ le vecteur de densité de courant de particules. Pendant dt , il y a $dN = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{dS} dt$ particules qui traversent \vec{dS} .

Le débit volumique à travers sur surface Σ s'écrit : $D = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS}$

2) Équation de diffusion

a) Conservation de la matière

On considère une tranche de longueur dx (entre x et $x + dx$) et de section droite S (cylindre).

À l'instant t , $dN(t) = n(x,t)dx = n(x,t)Sdx$

A l'instant $t + dt$, $dN(t + dt) = n(x, t + dt)d\tau = n(x, t + dt)Sdx$

$$\text{Donc } d^2N = dN(t + dt) - dN(t) = (n(x, t + dt) - n(x, t))Sdx = \frac{\partial n}{\partial t} Sdxdt$$

Cette variation est due aux échanges de particules aux limites du système.

$$\text{On a donc également } d^2N = j(x, t)Sdt - j(x + dx, t)Sdt = -\frac{\partial j}{\partial x} dxSdt$$

$$\text{Ainsi, } \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

$$\text{S'il y a une source, alors } d^2N = -\frac{\partial j}{\partial x} d\tau dt + \sigma d\tau dt \text{ donc } \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = \sigma$$

En 3D, on considère un volume V délimité par une surface fermée S .

$$\iiint \frac{\partial n}{\partial t} d\tau dt = -\oiint \vec{j} \cdot \vec{dS} dt + \iiint \sigma d\tau dt$$

Introduction de l'opérateur divergence :

Un opérateur vectoriel agit sur un scalaire ou un vecteur, le résultat est un scalaire ou un vecteur et sa définition est indépendante de tout système de coordonnées.

L'opérateur divergence est défini par le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\text{Pour tout } V, \oiint \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint \text{div}(\vec{A}) d\tau$$

$$\text{En coordonnées cartésiennes : } \text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{Si on reprend l'équation établie précédemment, on obtient : } \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = \sigma$$

Il s'agit de l'équation de conservation de la matière.

b) Équation de diffusion

Expérimentalement on observe que :

- si n est uniforme, alors \vec{j} est nul
- le courant de particules est d'autant plus intense que la répartition est inhomogène
- le courant de particules doit être orienté des zones les plus concentrées vers les zones les moins concentrées

Introduction de l'opérateur gradient :

$$\text{Par définition, } df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{dl}$$

$$\text{En coordonnées cartésiennes : } \overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Le phénomène de diffusion a été observé par Fick en 1855 et décrite par la loi qui porte son nom :

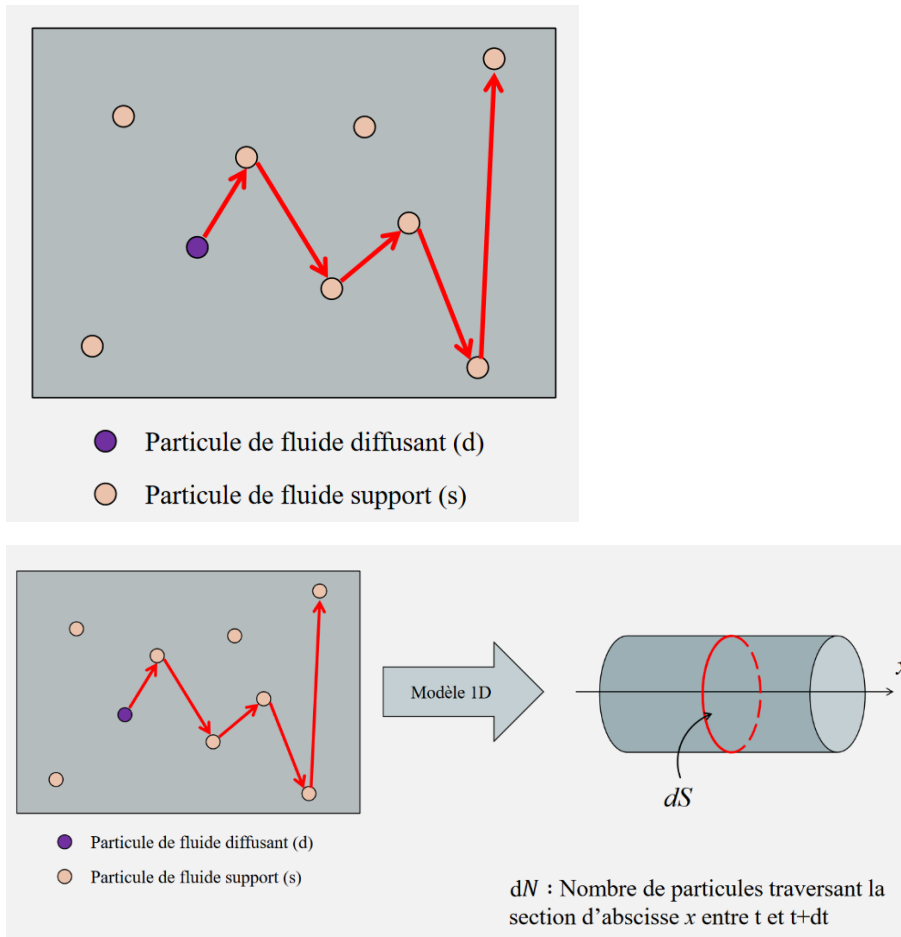
$$\text{La loi de Fick s'écrit : } \vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}}(n)$$

D est le coefficient de diffusion ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$), il dépend des particules qui diffusent, du milieu dans lequel elles diffusent, et de paramètres tels que la température et la pression.

Si on remplace \vec{j} par son expression dans l'équation de conservation, on obtient, en posant $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \Delta f : \frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$. Cette équation est appelée équation de diffusion. Δ est le laplacien.

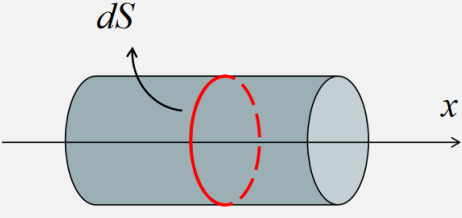
En ordre de grandeur $l \sim \sqrt{D\tau}$, l est une échelle d'espace, τ est une échelle de temps.

c) Modèle microscopique



On reprend la diffusion unidirectionnelle dans un cylindre d'axe Ox et section dS . On cherche à exprimer différemment $dN =$ nombre de particules traversant la section d'abscisse x entre les instants t et $t + dt$ mais cette fois ci avec un modèle microscopique pour pouvoir expliciter la densité de flux de particules \vec{j} sans utiliser la loi phénoménologique de Fick. On part des hypothèses :

- Toutes les molécules du gaz diffusé ont la même norme de vitesse, égale à la vitesse quadratique moyenne
- Répartition isotrope des vecteurs vitesse dans les 6 directions : $\pm\vec{u}_x, \pm\vec{u}_y, \pm\vec{u}_z$
- Les seules interactions sont les chocs des molécules du gaz diffusé sur celles du gaz support. On néglige les chocs entre particules diffusées. Entre deux chocs, mouvement rectiligne uniforme selon une des 6 directions
- Les chocs ont tous lieu au même instant. La durée entre 2 chocs est $t_* = \frac{l^*}{v_*} \sim 10^{-10} s$, avec l^* le libre parcours moyen
- Équilibre thermique local : $dt \ll \tau$ (durée caractéristique de variations des grandeurs macroscopiques), et $dt \gg t_*$



dS

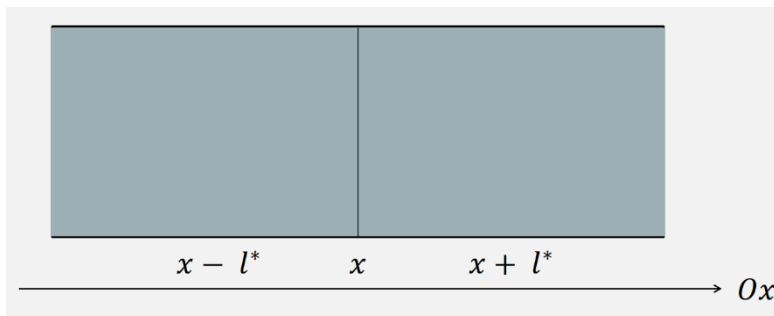
x

l^* : libre parcours moyen
 v^* : vitesse quadratique moyenne

Hypothèses :

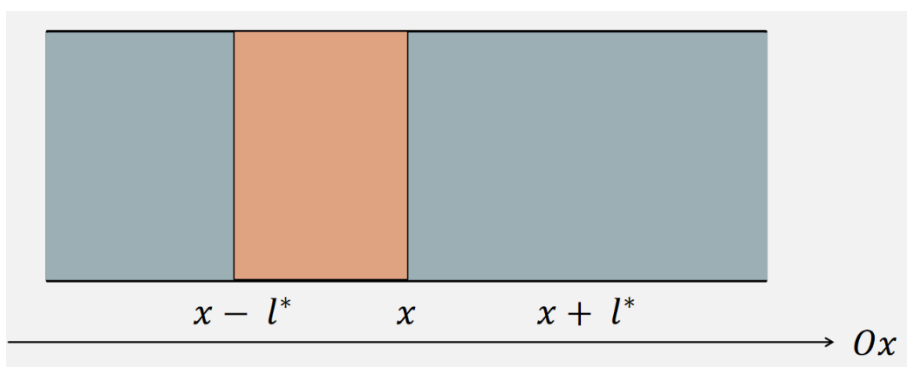
- $\forall i \|\vec{v}_i\| = v^*$ la vitesse quadratique moyenne
- Isotropie de la distribution des vitesses : équiprobabilité des directions $\pm\vec{u}_x, \pm\vec{u}_y, \pm\vec{u}_z$
- Aucune interaction entre deux chocs des molécules diffusantes sur les molécules support \rightarrow mouvement rectiligne uniforme
- Les chocs ont lieu tous les $t^* = \frac{l^*}{v^*}$ au même instant pour toutes les molécules
- ETL : $t^* \ll dt \ll \tau$

On raisonne sur une durée t^* . Toutes les molécules ont subi à choc à l'instant t et n'en subiront donc plus entre t et $t + t^*$. Seules les molécules qui ont un vecteur vitesse selon $\pm\vec{u}_x$ vont franchir dS et donc participer à la diffusion. Pendant t^* elles parcourent une distance $l^* = v^*t^*$ soit dans un sens soit dans l'autre.



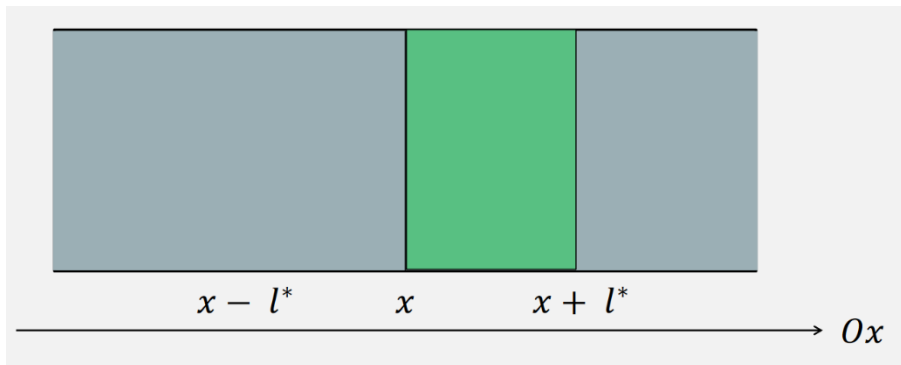
Les molécules qui vont franchir dS dans le sens de \vec{u}_x sont celles qui sont situées dans le cylindre de section dS et hauteur l^* , et possédant un vecteur vitesse dans la direction \vec{u}_x . En supposant que dans ce cylindre la densité moléculaire moyenne est $n(x - l^*, t)$ le nombre de ces molécules est donc :

$$dN_{g^*} = \frac{1}{6} n(x - l^*) v^* t^* dS$$



De la même manière, les molécules qui franchissent dS dans le sens opposé sont au nombre de :

$$dN_d = \frac{1}{6} n(x + l^*) v^* t^* dS$$



Finalement le nombre de molécules franchissant dS pendant la durée t^* est :

$$dN^* = dN_g^* - dN_d^* = -\frac{1}{6} v^* t^* dS (n(x + l^*) - n(x - l^*)) = -\frac{1}{3} l^* v^* \frac{\partial n}{\partial x} dS t^*$$

On considère ensuite la dérivée indépendante du temps pendant dt et on somme les nombres de particules traversant dS entre t et $t + t^*$, $t + t^*$ et $t + 2t^*$... jusqu'à atteindre $t + dt$ et on obtient :

$$dN = -\frac{1}{3} l^* v^* \frac{\partial n}{\partial x} dS dt$$

Par identification, $dN = j dS dt$, on en déduit : $D = \frac{1}{3} l^* v^* = l^* \sqrt{\frac{k_B T}{3m}}$

ORDRES DE GRANDEUR POUR LA DIFFUSION DE PARTICULES

Phase	Gaz		Liquide		Solide
	air	air	eau	eau	
Support	air	air	eau	eau	cuivre
Particules	H_2	O_2	H_2O	sucre	Al
D (m ² /s)	$7 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-10}$	$1,3 \cdot 10^{-30}$
Distance caractéristique de diffusion en 1 seconde	1 mm à 1 cm		1 μm à 0,1 cm		1 fm à 10 nm

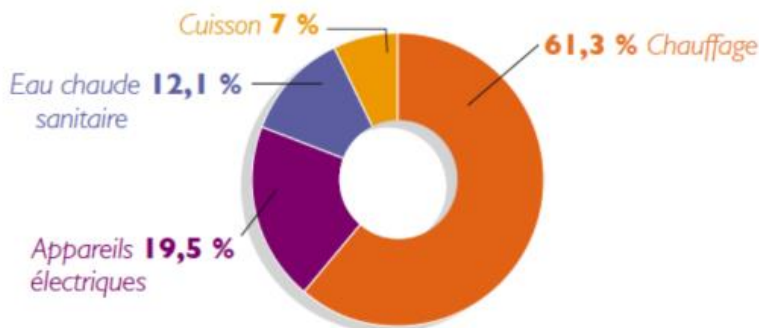
II Transferts thermiques (voir [1], [2], [4], [16], [17])

Il existe 3 modes de transfert thermique : conduction, convection et rayonnement.

On a vu en cours de thermodynamique la description de systèmes évoluant vers, ou à l'équilibre thermodynamique. Pourtant, la très grande majorité des systèmes avec lesquels nous interagissons au quotidien ne vérifient pas cette hypothèse : prenons l'exemple d'une maison. On veut se maintenir hors de l'équilibre thermodynamique, et profiter de 20°C en intérieur alors qu'il peut faire 0 dehors ! En revanche, ce maintien hors équilibre engendre nécessairement des flux de puissances thermiques, et c'est à ce phénomène que nous allons nous intéresser.

Cette discussion n'a pas qu'un intérêt théorique : plus de 60 % de la consommation énergétique d'un foyer est dédiée au chauffage de la maison. On va voir ici l'importance d'isoler ses combles pour seulement 1€...

La consommation d'énergie dans les résidences principales



Source CEREN 2012, Les chiffres clés du bâtiment, édition 2013, ADEME

Rappels sur l'équilibre thermodynamique local : Pour un volume dV de matériau : si le temps caractéristique des processus microscopiques responsables de l'établissement de l'équilibre thermodynamique (collisions, relaxations en général) est très petit devant le temps de variation de la température du solide, alors on est toujours infiniment proche de l'équilibre et on peut utiliser les variables thermodynamiques classiques.

Notion d'équilibre thermodynamique local

$E(t), P(t), T(t), N(t) \dots$



- Temps caractéristique de variation des variables thermodynamiques : τ_{ev}
- Temps caractéristiques de retour à l'équilibre : τ_{eq}

Si $\tau_{eq} \ll \tau_{ev}$, alors les variables thermodynamiques sont définies à tout instant.

1) Diffusion de la chaleur

a) Équation de la chaleur

On considère un tronçon de longueur dx et de section S (volume $d\tau = Sdx$). La variation d'énergie interne s'écrit, en vertu du premier principe :

$$dU(t) = \delta Q = u(x,t)dm = \rho u(x,t)d\tau$$

$$dU(t+dt) = \rho u(x,t+dt)d\tau$$

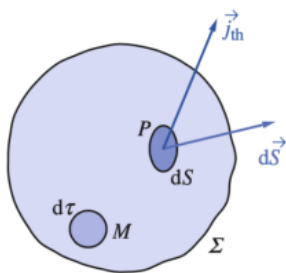
$$\text{Donc } d^2U = \rho \frac{\partial u}{\partial t} dt d\tau$$

L'énergie interne varie en raison des échanges thermiques et de la production $p d\tau dt$.

$$\text{Le même raisonnement conduit à } d^2U = -\frac{\partial j}{\partial x} d\tau dt + p d\tau dt$$

$$\text{Ainsi, } \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = p$$

Conservation de l'énergie thermique : cas 3D



$$\rho c_v \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q(M, t) = 0$$

Fourier, après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques (les fameuses séries de Fourier), a établi une loi phénoménologique qui porte son nom (1822) :

$$\text{Loi de Fourier : } \vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

λ est la conductivité thermique (donner quelques ordres de grandeur). Cette loi est valable pour des gradients de température pas trop élevés et des milieux isotropes.

Matériau	Conductivité thermique en W/(m.K)	Diffusivité thermique en m ² /s
Bois	~ 0.2	~ 1.5e-7
Verre à vitre	0.9	4.5e-7
Béton	1.5	5.4e-7
Cuivre	380	1.2e-4

De plus, $u(x,t) = cT(x,t)$

On obtient donc l'équation de diffusion de la chaleur : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + p$

On peut poser $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$ (coefficient de diffusion thermique)

On peut mettre en évidence la diffusion thermique avec une lame de cuivre sur laquelle on fixe des clous séparés d'environ 1 cm les uns des autres avec de la paraffine fondue puis refroidie. On place une bougie à une extrémité, dont la flamme est au contact avec la lame de cuivre. Au bout d'un certain temps, les clous tombent les uns après les autres.

b) Résistance thermique

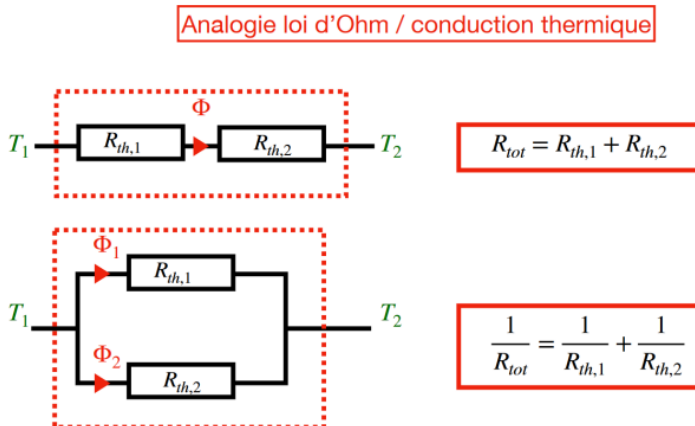
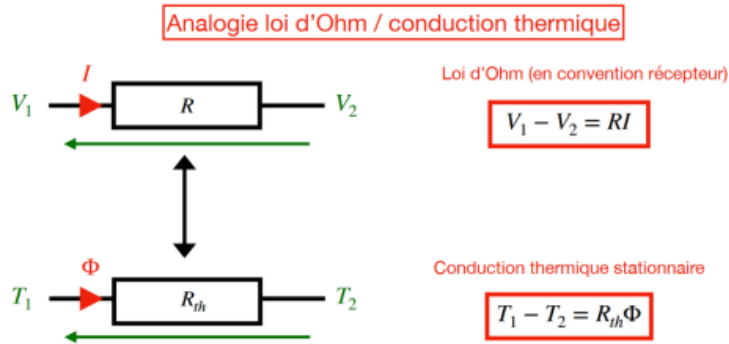
On considère une paroi de surface S , d'épaisseur, de conductivité thermique λ

En régime permanent et en l'absence de source : $T(x) = ax + b$, avec $T(0) = T_1$ et $T(e) = T_2$

On a alors $T_1 - T_2 = R_{th}\Phi_{0 \rightarrow 1}$

R_{th} est appelée résistance thermique (en $K \cdot W^{-1}$), elle dépend de la conductivité et de la géométrie. Pour le barreau considéré, $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

On peut faire une analogie avec la loi d'Ohm.



Ex : température d'un composant électronique

c) Application au double vitrage (À COMPLÉTER)

L'isolation thermique constitue un enjeu majeur, car aujourd'hui il existe encore de nombreuses passoires thermiques, qui induisent une consommation excessive de l'énergie. Le double vitrage permet un meilleur isolement.

On a détaillé le cas des solides, dans lesquels les transferts thermiques se font de manière diffusive par conduction. En fait, la conduction existe dans tous les corps, et donc également dans les fluides. Pourtant, si on s'intéresse à la thermalisation d'un fluide, celle-ci se fait bien plus vite que prévue par la diffusivité thermique. Dans les fluides, c'est le phénomène de convection, déjà vu en mécanique des fluides, qui est prépondérant. Il est extrêmement difficile à modéliser mathématiquement. On va ici se réduire à décrire les échanges entre un fluide et une paroi à sa surface, toujours dans l'optique de décrire les pertes thermiques d'un mur d'une maison.

d) Structure interne de la Lune

On suppose que le flux de chaleur vaut $18,5 \text{ mW.m}^{-2}$. En coordonnées sphériques, l'équation de diffusion thermique s'écrit : $\rho c \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\lambda}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dT}{dr}) + \rho H = 0$ en régime stationnaire

Donc, $\lambda \frac{dT}{dr} = -\frac{\rho H r}{3} + \frac{K}{r^2}$, on prend $K = 0$

À la surface, $r = R_L = 1737,1 \text{ km}$: $\phi = \frac{\rho H R_L}{3} = 18,5 \text{ mW.m}^{-2}$

On en déduit $H = 9,6 \cdot 10^{-12} \text{ W.kg}^{-1}$ (taux de production radioactif).

$T(r) = -\frac{\rho H r^2}{6\lambda} + T_0$, T_0 est la température au centre de la Lune

On prend $T_{\text{surf}} = 277 \text{ K}$ (avec $T_{\text{surf}} = \left(\frac{L_{\odot}}{16\pi d^2 \sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$, voir plus bas)

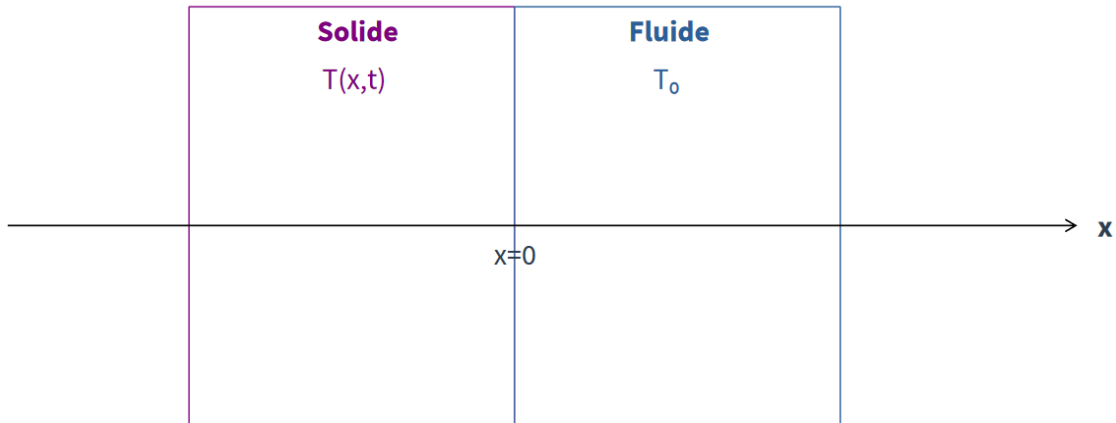
On en déduit $T_0 = 4300 \text{ K}$ (pour $\lambda = 4 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)

2) Convection (À COMPLÉTER)

a) Conducto-convection

L'existence d'une interface solide/fluide induit ici un flux d'énergie thermique supplémentaire par rapport à la diffusion.

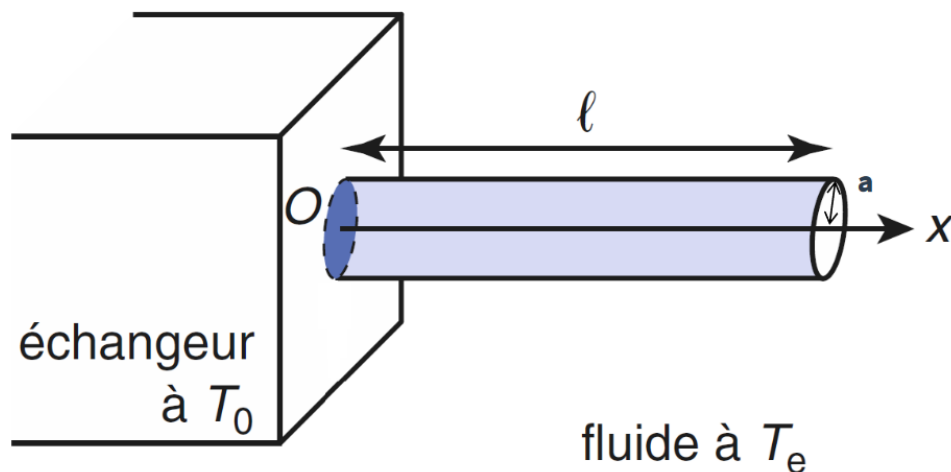
On étudie ici les interactions entre un solide à température T_1 donnée, et un fluide occupant le demi-espace x positif, à une température uniforme T_2 loin de l'interface. Dans le fluide, la température est uniformisée par convection majoritairement. Dans le solide, il y a de la diffusion. Comment modéliser la densité de flux thermique à l'interface, $j_q(x=0)$? Ici, il peut être judicieux de travailler en parallèle sur un schéma qui présente l'interface en $x = 0$ comme précédemment, et dans le même temps construire la loi de Newton :



On a vu en mécanique des fluides la notion de couche limite. Cela signifie que sur une distance δ au voisinage direct de l'interface, une portion du fluide est immobile, alors qu'il est en mouvement loin de l'interface. Dans ce cas, on peut considérer que dans la couche limite, le transfert thermique se fait par conduction. Dans ce cas, on peut appliquer la loi de Fourier dans la couche limite. Par la suite, on néglige son épaisseur et on travaille avec une discontinuité de la température, décrite par la loi de Newton pour la conducto-convection :

$\vec{j}_q(x=0) = h(T_1 - T_2)\vec{n}_{1\rightarrow 2}$, avec h le coefficient conducto-convectif (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$), qui vaut $h = \frac{\lambda}{\delta}$, et $\vec{n}_{1\rightarrow 2}$ est le vecteur unitaire dirigé vers les x positifs. Si on intègre le flux de puissance sur toute la surface S de la paroi, on introduit à nouveau une résistance thermique : $T_1 - T_2 = R_{cc}\phi$, avec $R_{cc} = \frac{1}{hS}$.

b) Application : ailette de refroidissement (À COMPLÉTER)



Voir H-prépa

$$T(x) = (T_0 - T_e) \left[\cosh\left(\frac{x}{x_0}\right) - \frac{th\left(\frac{l}{x_0}\right) + \frac{hx_0}{\lambda}}{1 + \frac{hx_0}{\lambda} th\left(\frac{l}{x_0}\right)} sh\left(\frac{x}{x_0}\right) \right] + T_e$$

-efficacité de l'ailette : on montre que le flux dissipé est 70 fois plus important avec l'ailette que sans l'ailette

c) Application : bilan thermique d'un studio

On s'intéresse à un studio, chauffé à 20°C alors qu'il fait 0°C dehors, dont on considère qu'un seul mur donne sur l'extérieur (cette description est bien justifiée : comme les appartements voisins, au-dessus et en dessous sont également chauffés, les pertes à travers les parois communes sont négligeables). On donne les données suivantes :

- Surface $S = 25 \text{ m}^2$
- Épaisseur $e = 30 \text{ cm}$
- Conductivité thermique du béton : $\lambda = 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- Coefficient de conducto-convection $h = 3 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$

Dans ce cas, on calcule le flux à travers le mur grâce aux résultats précédents, en se souvenant qu'il y a conduction dans la paroi, et que l'air à $T = 0^\circ\text{C}$ loin du mur reçoit de la chaleur à son contact :

$$\phi_P = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{th} + R_{cc}}, \text{ où } R_{th} + R_{cc} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{hS}$$

La puissance perdue à travers la paroi vaut donc $\phi_P = 571 \text{ W}$.

À partir de ce bilan thermique, on peut se demander comment assurer le chauffage de l'appartement à la température supposée. On s'intéresse ici au choix d'un radiateur infrarouge portée à la température T_R (comme certains radiateurs désormais interdits qui chauffaient les terrasses des bars), modélisé par une surface carrée d'aire A de 50 cm de côté qui émet un rayonnement thermique de puissance ϕ_R . On suppose que la totalité du rayonnement est reçue par le mur (hypothèse évidemment abusive !)

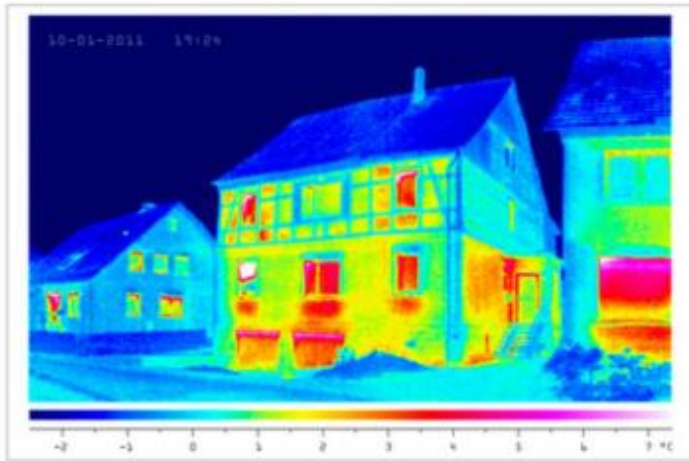
Pour faire les choses bien, on peut effectuer un bilan thermique sur la surface intérieure du mur. La condition pour que ce système soit en régime stationnaire à la température de 20 °C, comme supposé, est :

$$\Phi_R = \sigma T_R^4 \times A = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{th} + R_{cc}} = \Phi_P$$

(voir plus bas)

C'est-à-dire que la puissance reçue est égale à celle perdue. Finalement on trouve que la température du radiateur doit être de $T_R = 175^\circ\text{C}$, l'ordre de grandeur est bon.

Étant donné que le mur absorbe le rayonnement du radiateur, il va lui aussi le réémettre en partie sous forme d'un rayonnement thermique, même si le modéliser par un corps noir est abusif. En revanche, le rayonnement produit est utilisé par la thermographie infrarouge pour réaliser des bilans d'isolation des maisons (on fait ainsi l'image des pertes thermiques !)



Rayonnement du corps noir : applications à la thermographie et analyse des isolations

III Sources de rayonnement (voir [1], [2], [5] à [12])

Le rayonnement désigne le processus d'émission ou de propagation d'énergie et de quantité de mouvement impliquant une onde ou une particule. Quand on bronze le Soleil chauffe la peau, c'est le rayonnement qui en est à l'origine. Quand on chauffe un métal, à partir d'une certaine température, on observe que celui-ci émet un rayonnement qui peut être rouge jusqu'à blanc. Nous allons nous intéresser à deux types de rayonnement dans ce cours en particulier : le rayonnement dipolaire et le rayonnement du corps noir.

1) Rayonnement dipolaire

a) Champ électromagnétique rayonné

On introduit une distribution D de charges en mouvement. On observe le champ rayonné en un point M repéré par un vecteur \vec{r} . On suppose que la distribution est discrète et on se place dans le cadre

non relativiste. En jauge de Lorentz, le potentiel retardé s'écrit : $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i \in D} \frac{q_i \vec{v}_i(t - \frac{PM}{c})}{|PM|}$

Le temps de retard correspond à au temps de propagation des champs de la source à l'observateur.

Cette expression du potentiel vecteur est très générale, mais il est difficile de faire des calculs avec.

On va formuler quelques hypothèses réalistes :

- approximation dipolaire : $r \gg a$ (taille caractéristique de D), on se place donc loin des sources, on a donc $PM \sim r$
- ARQS : $\frac{a}{c} \ll T$ (temps caractéristique de D), le temps de propagation des champs est négligeable devant son temps typique de variation, $t - \frac{PM}{c} \sim t - \frac{a}{c} = t'$ (on néglige le retard)

On obtient : $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{p}$ avec $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$

$$\vec{p}(t') = p(t') \vec{e}_z$$

On peut maintenant calculer \vec{E} et \vec{B} .

$$\vec{B}(M, t) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{\ddot{p}}{rc} \right) \sin(\theta) \vec{e}_\varphi$$

On peut montrer également que $\vec{E}(M, t) = \frac{2 \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2c} \right) \vec{e}_r + \frac{\sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right) \vec{e}_\varphi$

On définit la zone de rayonnement par : $r \gg cT = \lambda$

Dans cette zone, on peut simplifier l'expression du champ électromagnétique, le terme en \ddot{p} domine.

On a donc : $\vec{B} = \frac{\mu_0 \ddot{p} \sin(\theta)}{4\pi rc} \vec{e}_\varphi$ et $\vec{E} = \frac{\mu_0 \ddot{p} \sin(\theta)}{4\pi r} \vec{e}_\theta$

La propagation se fait selon \vec{e}_r , on a localement une structure d'ondes planes.

b) Application : dipôles oscillants

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t)$$

Donc $\vec{B} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin(\theta)}{4\pi rc} \vec{e}_\varphi$ et $\vec{E} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin(\theta)}{4\pi r} \vec{e}_\theta$

La puissance rayonnée s'écrit : $P_{ray} = \iint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$, avec $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting.

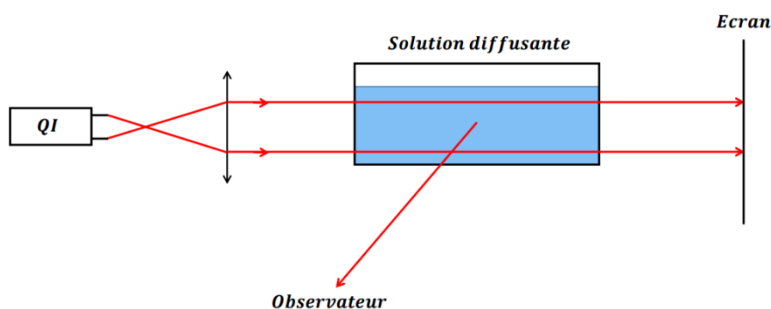
On a donc $P_{ray}(t') = \frac{p_0^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$

Ainsi : $\langle P_{ray} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$

$\omega_{bleu} \sim 2\omega_{rouge}$ donc la puissance diffusée est environ 16 fois plus intense dans le bleu que dans le rouge, on peut le vérifier par une expérience :

On remplit une cuve d'eau et ajoute quelques gouttes de lait. Le lait contient des particules diffusantes. On observe la lumière diffusée orthogonalement au faisceau incident.

Expérience : diffusion du rayonnement



Autour du faisceau qui traverse la cuve, on remarque que l'eau prend une coloration bleutée. En mettant un écran en sortie de la cuve, la tache du faisceau sur l'écran est orangée voire rouge. Le faisceau s'est plus appauvri en lumière bleue qu'en lumière rouge, donc en proportions relatives il s'est enrichi en rouge.

Ce résultat permet d'expliquer la couleur du ciel et des couchers de soleil (voir également effet Tyndall).

Le modèle du dipôle oscillant permet de décrire des phénomènes tels que la diffusion Rayleigh, le fonctionnement des antennes dipolaires ou le rayonnement thermique. Nous allons désormais nous intéresser à ce dernier. Les longueurs d'ondes lumineuses visibles ($400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm}$) sont très grandes par rapport aux dimensions des petites molécules (de $0,1 \text{ nm}$ à 1 nm). En conséquence, soumises à une onde lumineuse, les molécules d'un gaz se polarisent et se comportent comme autant de dipôles oscillants.

2) Rayonnement thermique

a) Propriétés du rayonnement et interactions avec la matière

Un corps chauffé émet de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique qui peut se propager dans le vide.

On définit la luminance comme l'énergie transportée par unité de temps à travers une surface unité selon la direction donnée par $d\Omega$.

$L = \frac{d^2\Phi}{dsd\Omega}$ avec Φ le flux du vecteur de Poynting à travers une élément de surface ds .

On considère la quantité d'énergie radiative confinée dans un angle solide $d\Omega$. La géométrie est importante dans ce problème :

On considère un mur rayonnant de façon isotrope un rayonnement visible de luminance L_0 et un radiomètre comprenant un détecteur de surface s_d au fond d'un tube de profondeur x et d'ouverture S_0 , situé à la distance D du mur.

L'angle sous lequel un point de mur rayonne vers le détecteur s'écrit : $\Omega_d = \frac{s_d}{D^2}$

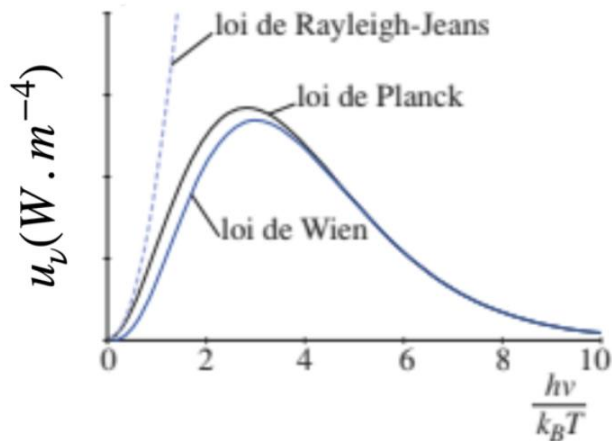
L'angle solide sous lequel un point du détecteur voit le mur s'écrit : $\Omega_m = \frac{S_m}{D^2} = \frac{S_0}{x^2}$

La puissance émise et reçue par le détecteur est : $P = L_0 S_m \Omega_d = \frac{L_0 S_0 s_d}{x^2}$

En coordonnées sphériques, $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\varphi$, pour l'espace total $\Omega = 4\pi$.

On définit également la densité de flux énergétique F (énergie transportée par unité de temps et de surface dans toutes les directions) : $\varphi = \frac{d\Phi}{ds}$

Dans la deuxième partie du XIX siècle, on était capables d'observer des spectres de corps. À cette époque, on connaissait deux lois expérimentales : la loi de Rayleigh-Jeans (en 1900), qui ne permettait pas d'expliquer le rayonnement dans les grandes fréquences (catastrophe ultra-violette !), et la loi de Wien (qui n'expliquait pas le rayonnement dans les basses fréquences).



En 1900 Planck présente sa théorie. Elle repose sur l'hypothèse que l'énergie serait quantifiée (ce qui sera ensuite vu comme les photons par Einstein, cela sera à la base du développement de la mécanique quantique au début du XXe siècle).

La loi de Planck s'écrit : $B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$

Démonstration :

On étudie un corps à l'équilibre radiatif et thermodynamique, une boîte de volume $V = L^3$ à la température T , dans laquelle il y a des photons qui interagissent avec la boîte (chocs, absorption, émission) mais pas entre eux. On cherche la densité d'énergie entre ν et $\nu + d\nu$, du .

Densité spectrale d'énergie

- U : énergie totale
- u : énergie par unité de volume
- du : densité volumique d'énergie dans une bande de fréquence entre ν et $\nu + d\nu$

Alors : $du = u_\nu(\nu, T)d\nu$

Energie individuelle d'un photon (à dc près) Nombre de photons entre ν et $\nu+d\nu$

$$du = \frac{\epsilon}{V} dN$$

Volume de la boîte

Nombre moyen d'occupation de l'état de l'énergie $\epsilon=h\nu$ Densité d'états

$$dN = N(\nu, T) \rho(\nu) d\nu$$

Nombre d'états entre ν et $\nu+d\nu$

on utilise la statistique de Bose-Einstein, et le fait que pour les photons, $\mu = 0$.

Remarque : en réalité le potentiel chimique n'est pas défini pour les photons car leur nombre n'est pas fixé. On le prend donc égal à 0 car les résultats sont les mêmes.

$$N(\epsilon, T) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{k_B T}} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon}{k_B T}} - 1}$$

Nombre de polarisations possibles Dans $d^3 \vec{k}$

$$\rho(\epsilon) d\epsilon = 2 \cdot \frac{d^3 \vec{k}}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3}$$

volume d'un état dans l'espace des \vec{k}

Puis on utilise le fait que cela ne dépend que de la norme de \vec{k} , d'où : $d^3 k = 4\pi k^2 dk$. On obtient alors :

$$\rho(\epsilon) d\epsilon = \frac{V \cdot \epsilon^2}{\pi^2 \cdot (c\hbar)^3} \cdot d\epsilon$$

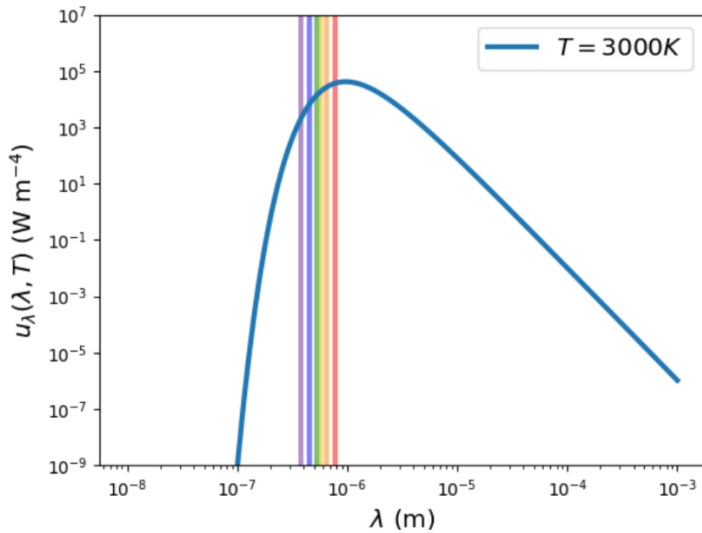
Ainsi :

$$du = \frac{\epsilon^3}{\pi^2 \cdot (c\hbar)^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\epsilon}{k_B T}} - 1} \cdot d\epsilon$$

Ensuite, on utilise le fait que $\epsilon = h\nu$ et $d\epsilon = h d\nu$, puis on identifie à $u_\nu(\nu, T)$. D'où la loi de Planck :

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Remarque : $B_\nu(\nu, T) |d\nu| = B_\lambda(\lambda, T) |d\lambda|$, $d\lambda = \frac{c}{\nu^2} |d\nu|$ et $|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} |d\lambda|$



Aux basses fréquences : Loi de Rayleigh-Jeans

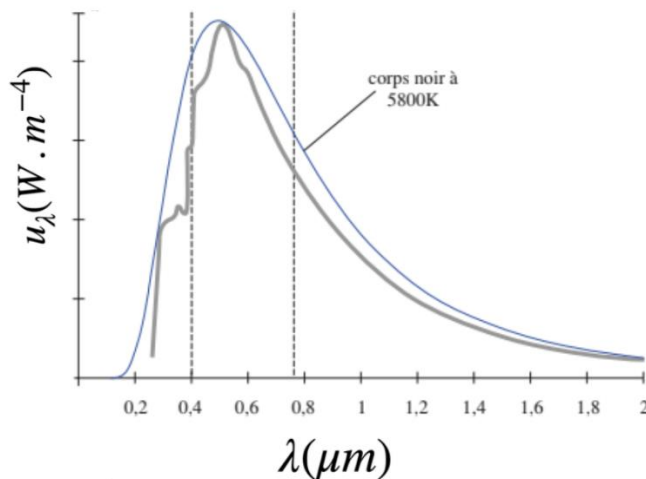
$$h\nu \ll k_B T \Rightarrow u_\nu = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3}$$

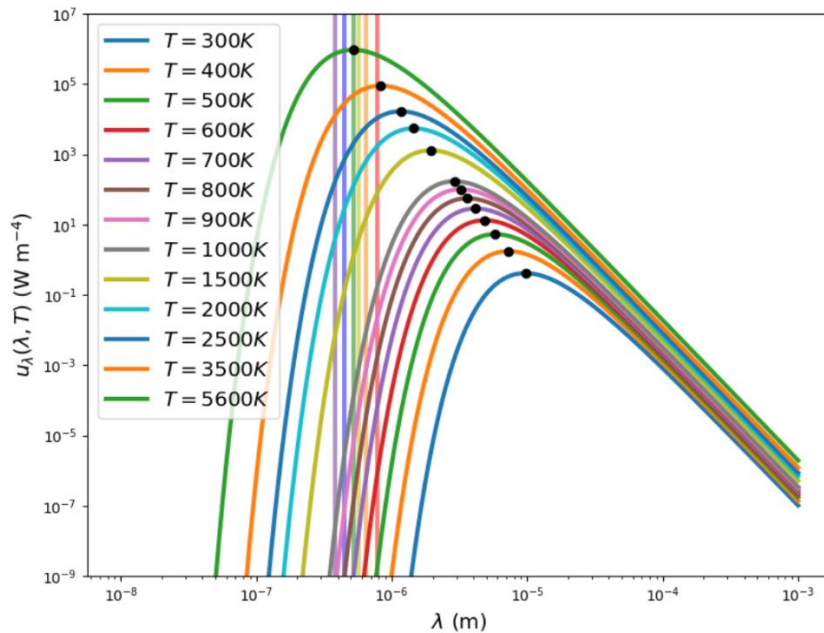
Aux hautes fréquences : Loi de Wien

$$h\nu \gg k_B T \Rightarrow u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$$

Deux corps noirs à la même température émettent le même rayonnement : $\lambda_{\max} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m.K}$ (loi de Wien).

Spectre du Soleil :





La loi de Stefan-Boltzmann représente la luminance énergétique du corps noir intégrée sur l'ensemble des longueurs d'onde : $L = \int_0^{+\infty} B_\lambda d\lambda$

Pour un rayonnement isotrope : $\varphi = \pi L = \sigma T^4$

b) Bilan radiatif de la Terre : effet de serre

On peut raisonnablement considérer que la Terre est isolée. On suppose que :

- La Terre est sphérique
- La seule source d'énergie est le Soleil
- La température est uniforme
- La distance Terre-Soleil est constante, notée D
- La Terre et le Soleil sont des corps noirs

La Terre reçoit une puissance : $P_{S \rightarrow T} = \frac{\pi R_T^2}{4\pi D^2} P_S = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4$, $P_S = 4.10^{26} \text{ W}$

Application numérique : $T_T = 6,3 \text{ °C}$

En réalité, la Terre réfléchit une partie du rayonnement solaire. On définit donc l'albedo A comme le pouvoir réfléchissant d'une surface. On prend $A = 0,3$.

En fait, on a : $P_{S \rightarrow T}(1 - A) = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4$

On a donc cette fois $T_T = -17,6 \text{ °C}$

Il manque clairement quelque chose à notre modèle. On va maintenant prendre en compte l'atmosphère, considérée aussi comme un corps noir. L'atmosphère émet vers la Terre et dans l'espace. On a : $\varphi_T = 2\varphi_a$ et $\varphi_a + \varphi_s = \varphi_T$

Donc $\varphi_T = 2\varphi_s$

Cette fois : $2P_{S \rightarrow T}(1 - A) = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4$ et $T_T = 30,8 \text{ °C}$.

Enfin on considère que l'atmosphère absorbe une partie du rayonnement (coefficient d'absorption d'environ 0,3).

On a donc : $\alpha\varphi_S + \varphi_T = 2\varphi_a$ et $\varphi_a + (1-\alpha)\varphi_S = \varphi_T$

Ainsi, $P_{S \rightarrow T}(2 - \alpha)(1 - A) = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4$ donc $T_T = 18,7 \text{ °C}$

La valeur moyenne est en réalité de 15 °C, le modèle est donc valide.

c) Autre application : formation de la Lune

(voir mécanique)

Il existe d'autres types de rayonnement, comme le rayonnement synchrotron, très important en astrophysique, ou encore le rayonnement dipolaire magnétique.

IV Diffusion de la lumière (voir [1], [13], [14], [15])

La diffusion de la lumière est le phénomène par lequel la lumière est déviée dans diverses directions par une interaction avec d'autres objets. La diffusion peut être isotrope, ou anisotrope. En particulier, la fraction de l'onde incidente qui est retournée dans la direction d'où elle provient est appelée rétrodiffusion. La diffusion peut s'effectuer avec ou sans variation de fréquence. On parle de diffusion inélastique dans le premier cas, élastique dans le second. La polarisation du rayonnement incident peut être modifiée par la diffusion.

Le ciel est bleu en raison des particules atmosphériques qui diffusent un niveau plus élevé de lumière bleue que de lumière rouge.

1) Diffusion élastique

Une diffusion élastique est une interaction, entre deux corps ou plus, au cours de laquelle l'énergie cinétique totale est conservée, mais à la suite de laquelle les directions de propagation sont modifiées. Ce changement de direction, dû aux forces d'interaction, est ce qui constitue la diffusion.

Par exemple, on peut citer la diffusion Thomson, qui est la diffusion d'un photon de faible énergie sur une particule chargée au repos comme un électron libre.

On va s'intéresser à la diffusion des ondes électromagnétiques par la matière.

a) Théorie de Mie

La théorie de Mie, est une solution particulière des équations de Maxwell décrivant la diffusion élastique d'une onde électromagnétique plane par une particule sphérique caractérisée par son diamètre et son indice de réfraction complexe. Cette théorie s'applique très mal aux particules non sphériques.

Cette théorie explique dans quelles directions la diffusion est la plus intense, on obtient ainsi un «patron de réémission» qui est comparable à celui des lobes d'émission d'une antenne, avec, dans le cas de grosses particules, un lobe plus intense dans la direction opposée à celle d'où provient l'onde incidente.

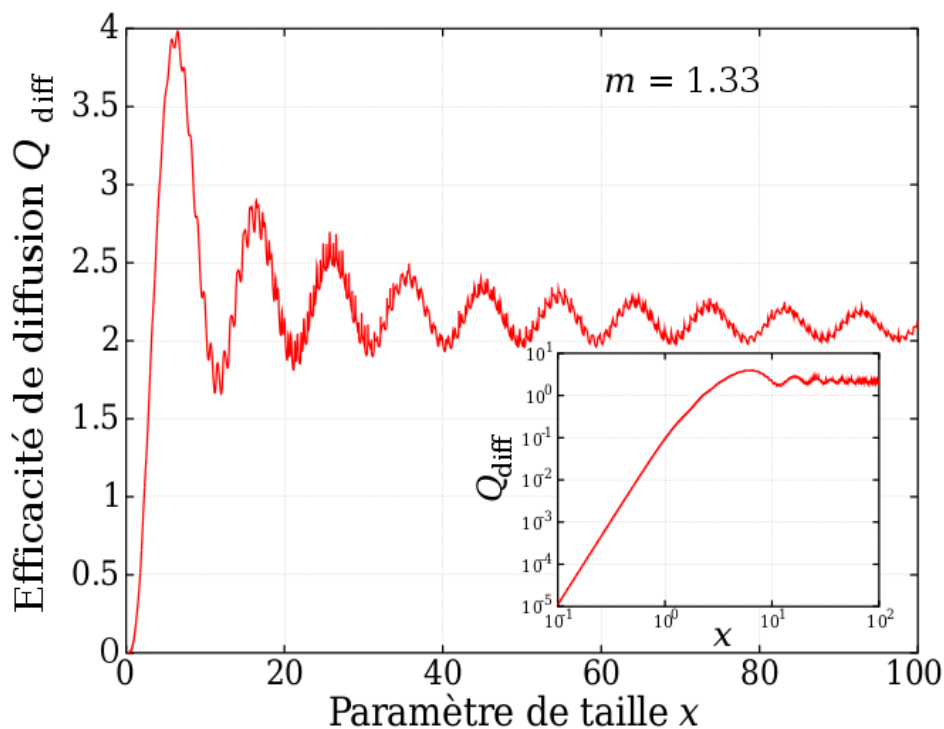
La diffusion de Mie n'est pas fortement dépendante de la longueur d'onde utilisée. Elle produit par conséquent une lumière presque blanche quand le Soleil illumine de grosses particules dans l'air : c'est cette dispersion qui donne la couleur blanc laiteux à la brume et au brouillard.

On considère une onde plane monochromatique de vecteur d'onde \vec{k} se propageant dans un milieu d'indice N . Cette onde incidente rencontre une sphère de rayon a et d'indice n . A la suite de l'interaction, une onde est diffusée par la sphère dans tout l'espace.

La diffusion est entièrement déterminée par le paramètre de taille : $x = \frac{2\pi Na}{\lambda}$ et le rapport d'indice : $m = \frac{n}{N}$

La sphère a une dimension finie alors que l'onde plane incidente a une extension en théorie infinie. La section efficace de diffusion σ_{diff} permet de caractériser l'interaction entre les deux. Intuitivement, l'ombre portée par une sphère opaque de rayon a est de surface πa^2 , aussi on compare souvent la section efficace de diffusion avec cette section droite en définissant l'efficacité de diffusion :

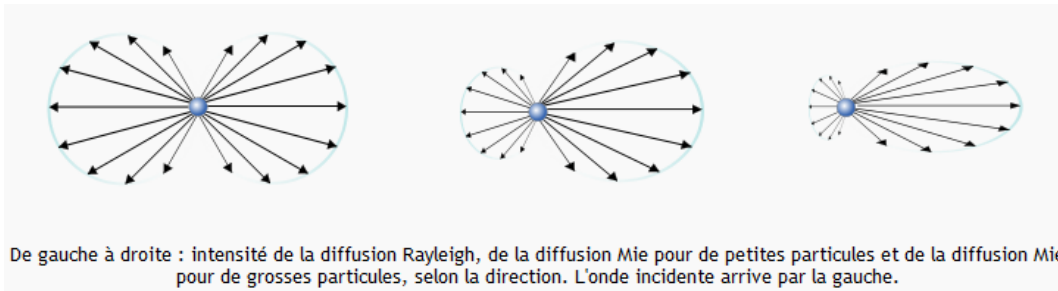
$Q_{diff} = \frac{\sigma_{diff}}{\pi a^2}$ avec $\sigma_{diff} = \frac{P_{diff}}{\langle \vec{n} \rangle}$, P_{diff} est la puissance électromagnétique diffusée, \vec{n} est le vecteur de Poynting.



L'efficacité de diffusion tend asymptotiquement vers 2 par des oscillations amorties.

Le cas des particules de petites tailles ($x \ll 1$), sphériques ou non, correspond à la diffusion Rayleigh.

b) Diffusion Rayleigh



Dans le cadre du rayonnement dipolaire, on peut montrer que $\langle P_{ray} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$ (puissance rayonnée) **(voir plus haut)**

Ce résultat permet d'expliquer la couleur du ciel et des couchers de soleil.

Q_{diff} est proportionnel à x^4

c) Application : eau en suspension

On considère des gouttelettes sphériques d'eau liquide de rayon r en suspension dans l'air. Le contenu en liquide par volume d'air est fixé à $C = 0,5 \text{ g.m}^{-3}$. La théorie de Mie appliquée à des gouttelettes d'eau pour une longueur d'onde $\lambda = 500 \text{ nm}$ permet de paramétrer de façon simplifiée le coefficient Q sous

la forme : $Q = \begin{cases} 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^4 & \text{pour } r < r_0 \\ 2 & \text{pour } r > r_0 \end{cases}$, avec $r_0 = 0,1636 \text{ } \mu\text{m}$

La masse d'une gouttelette est $V = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$

La densité de gouttelettes s'écrit donc : $N = \frac{3C}{4\pi\rho r^3}$

La section efficace s'écrit : $\sigma = \begin{cases} \frac{2\pi r^6}{r_0^4} & \text{si } r < r_0 \\ 2\pi r^2 & \text{si } r > r_0 \end{cases}$

On définit le coefficient d'extinction par : $k_{ext} = \sigma_{ext}N$

On a donc : $k_{ext} = \begin{cases} \frac{3r^3C}{2\rho r_0^4} & \text{si } r < r_0 \\ \frac{3C}{2\rho r} & \text{si } r > r_0 \end{cases}$

On voit que k_{ext} est proportionnel à r^3 si $r < r_0$ et inversement proportionnel à r sinon.

Pour $r = 0,2 \text{ } \mu\text{m}$ (diffusion Rayleigh), $k_{ext} = 8,4 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1}$ et pour $r = 1 \text{ mm}$, $k_{ext} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$.

On définit l'opacité par : $\tau = k_{ext}L$, avec L la distance parcourue par un rayon lumineux.

En entrant dans l'atmosphère, la puissance lumineuse est atténuée d'un facteur $e^{-\tau}$.

2) Diffusion élastique

a) Exemple : diffusion Compton

Voir relativité restreinte

b) Diffusion Raman

La diffusion Raman est la diffusion inélastique d'ondes électromagnétiques sur des atomes, des molécules, ou des solides. Le milieu modifie la fréquence de la lumière qui y circule. Cet échange d'énergie entre le photon et le milieu peut avoir plusieurs causes : vibrations du cristal ou de la molécules, excitations magnétiques...La mesure de ce décalage permet de remonter à certaines propriétés du milieu. On parle alors de spectroscopie Raman. Cette technique est beaucoup répandue dans l'industrie et la recherche depuis la naissance du laser. On peut distinguer 2 cas :

- Décalage Stokes : la lumière est décalée vers le rouge avec la création d'un phonon
- Décalage Anti-Stokes : la lumière est décalée vers le bleu avec l'absorption d'un phonon

Un phonon désigne un quantum d'énergie de vibration dans un solide cristallin. lorsqu'un mode de vibration du cristal de fréquence définie ν cède ou gagne de l'énergie, il ne peut le faire que par paquets d'énergie $h\nu$, considérés comme des quasi-particules.

Le déplacement de Stokes est la différence entre la position du pic du spectre d'absorption et le pic du spectre de luminescence (fluorescence ou phosphorescence) de la même transition électronique.

La spectroscopie Raman, ou spectrométrie Raman, est une méthode non-destructive servant à caractériser la composition moléculaire et la structure d'un matériau. Cette technique est complémentaire de la spectroscopie infrarouge qui permet aussi d'étudier les modes vibrationnels d'un matériau. Pour les molécules avec un centre de symétrie, aucun mode vibrationnel n'est observable à la fois aux deux spectroscopies. Certains modes sont actifs au Raman seulement et d'autres à l'infrarouge seulement.

La méthode consiste à focaliser (avec une lentille) un faisceau laser sur l'échantillon à étudier ainsi qu'à analyser la lumière diffusée.

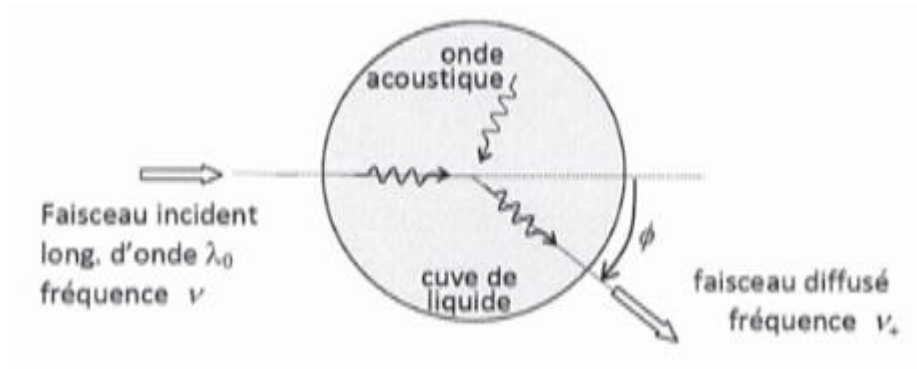
On peut utiliser la spectroscopie Raman dans le domaine de la géologie entre autres, afin d'identifier les minéraux constituant une roche. Elle peut aussi être utilisée dans l'étude d'autres planètes, notamment par des mesures in situ.

c) Diffusion Brillouin

La diffusion Brillouin est la diffusion inélastique d'ondes électromagnétiques sur un solide, elle concerne surtout les interactions avec les phonons acoustiques.

Dans une expérience de diffusion Brillouin, on illumine un milieu à l'aide d'un faisceau laser et on détecte la lumière diffusée à une fréquence légèrement différente. Les décalages en fréquence observés sont de l'ordre de 1 à 200 GHz environ. La mesure de ce décalage permet de remonter à certaines propriétés du milieu.

Dans ses principes, la diffusion Brillouin est tout à fait semblable à la diffusion Raman. Les deux techniques diffèrent par les ordres de grandeurs des décalages (supérieur à 300 GHz ou 10 cm^{-1} pour le Raman), ce qui implique des appareillages différents pour analyser les spectres diffusés. Dans le cas de la diffusion Raman, on utilisera un spectromètre à réseaux, et un interféromètre Fabry-Pérot dans le cas de la diffusion Brillouin.



Un faisceau laser incident éclaire une cuve cylindrique remplie de liquide. Les photons incidents subissent des collisions avec les phonons acoustiques correspondant aux fluctuations de densité du liquide. On détecte les photons diffusés, c'est-à-dire la lumière diffusée dans une direction faisant un angle ϕ avec la direction du faisceau incident.

Voir [14]

Nous avons vu des techniques de spectroscopie, utilisées pour sonder la matière, et notamment pour étudier des planètes. Par exemple, on peut utiliser une enclume de diamant pour étudier un échantillon dans des conditions extrêmes de pression et un laser infrarouge pour le chauffer et atteindre des températures élevées (2000 °C). La structure chimique peut être déterminée avec le spectre Raman, et l'élasticité du matériau de l'échantillon avec la diffusion Brillouin, entre autres.