

# MÉCANIQUE DES FLUIDES

## Bibliographie

- [1] cours persos
- [2] Cap prépa 2<sup>e</sup> année PC-PC\*, Pearson
- [3] Introduction à la dynamique des fluides, De Boeck
- [4] E-Learning Physique
- [5] <https://youtu.be/k7ZZtxdtmeQ>
- [6] Hydrodynamique physique (Guyon, Hulin, Petit)
- [7] Physique PSI/PSI\* (ou PC/PC\*), Olivier
- [8] Garing, Ondes
- [9] Centrale Physique 1 PC 2015
- [10] <https://www.youtube.com/watch?v=cLqmwBaudHg>
- [11] : <https://www.youtube.com/watch?v=TLbhrMCM40>
- [12] Diu (thermo)
- [13] <https://home.cern/fr/news/news/detectors/seeing-invisible-event-displays-particle-physics>  
(chambres à brouillard et à bulles)
- [14] <https://www.refletsdelaphysique.fr/articles/refdp/pdf/2008/02/refdp20089p14.pdf> (nucléation des bulles de champagne)

# I Statique des fluides ([1])

La statique des fluides, ou hydrostatique, est l'étude des fluides au repos. En statique des fluides, il n'y a pas de mouvement macroscopique d'une particule fluide par rapport à une autre.

Un fluide au repos exerce sur une paroi une force pressante répulsive normale à la paroi, proportionnelle à la surface. Sur une surface  $\overrightarrow{dS}$  s'exerce au point M :  $\overrightarrow{dF} = P(M)\overrightarrow{dS}$

La pression est donc la force surfacique exercée par un fluide au repos.

## 1) Relation fondamentale de la statique des fluides

On s'intéresse à la résultante des forces de pression exercées par le reste du fluide sur une particule de fluide de volume  $d\tau$ .

Schéma d'un cube, forces s'exerçant sur deux parois (par exemple selon l'axe Ox)

$$\overrightarrow{dF} = \sum_{i=1}^6 \overrightarrow{df}_i$$

$$\overrightarrow{df}_1 + \overrightarrow{df}_2 = P(x, y, z)dydz\overrightarrow{e}_x + P(x + dx, y, z)dydz(-\overrightarrow{e}_x) = -\frac{\partial P}{\partial x}d\tau\overrightarrow{e}_x$$

$$\text{De même, } \overrightarrow{df}_3 + \overrightarrow{df}_4 = -\frac{\partial P}{\partial y}d\tau\overrightarrow{e}_y \text{ et } \overrightarrow{df}_5 + \overrightarrow{df}_6 = -\frac{\partial P}{\partial z}d\tau\overrightarrow{e}_z$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{dF} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e}_z\right)d\tau = -\overrightarrow{grad}(P)d\tau$$

Les forces pressantes qui s'exercent sur une surface fermée S délimitant un volume V sont équivalentes à des forces volumiques de densité volumique  $\frac{\overrightarrow{dF}}{d\tau} = -\overrightarrow{grad}(P)$ .

Que se passe-t-il à l'interface entre deux fluides ? A l'interface entre deux fluides, il existe des phénomènes dits de tension de surface/superficielle qui font que P n'a aucune raison d'être continue. On négligera ces phénomènes dans la suite : P est donc continue à la traversée d'une interface.

Pour un champ de pression uniforme  $P = P_0 = \text{cste}$ , la résultante des forces de pression est nulle sur toute surface fermée est nulle.

On considère une particule de fluide de masse  $dm$ , de volume  $d\tau$ , immergée dans un fluide au repos.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- forces pressantes exercées par le reste du fluide :  $-\overrightarrow{grad}(P)d\tau$
- poids de la particule de fluide :  $\rho d\tau\vec{g}$

D'après le PFD :  $\vec{0} = (\rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}(P))d\tau$ , on en déduit la relation fondamentale de la statique des fluides :  $\rho\vec{g} = \overrightarrow{grad}(P)$

$$\overrightarrow{e}_z \text{ verticale ascendante : } \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$\overrightarrow{e}_z \text{ verticale descendante : } \frac{\partial P}{\partial z} = \rho g$$

➔ Dans le champ de pesanteur et dans un référentiel galiléen, les surfaces isobares sont des plans horizontaux

Remarque : en appliquant le PFD à une particule de fluide dans le cas général, on obtient la fameuse équation de Navier-Stokes (**voir plus bas**) :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \overrightarrow{f_{vol}} + \eta \Delta \vec{v}, \text{ souvent } \overrightarrow{f_{vol}} = \rho \vec{g}, \text{ force volumique de pesanteur}$$

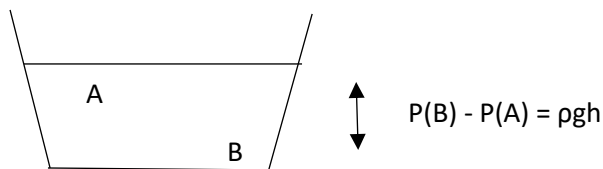
En hydrostatique,  $\vec{v} = \vec{0}$ , on en déduit donc la relation fondamentale de la statique des fluides :

$$\vec{\nabla}p = \rho \vec{g}$$

## 2) Application : liquide incompressible (**voir plus bas**)

On suppose que  $\rho$  et  $g$  sont constants. La relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit :

$\Delta P = \rho g \Delta z$ , ou encore  $P(B) - P(A) = \rho g(z_B - z_A)$ . La seule condition pour appliquer cette relation, c'est qu'on puisse relier A et B par un chemin composé du liquide.



Théorème de Pascal : Si on fait varier  $P(A)$  de  $\Delta P(A)$ , alors au point B,  $P(B)$  varie de  $\Delta P(B) = \Delta P(A)$ .

Toute variation de pression est transmise intégralement en tout point du fluide.

Expérience : tonneau de Pascal : comment faire exploser le tonneau avec 1L d'eau ? Le tonneau est rempli à ras-bord, on utilise un tube en verre et on continue à remplir (on gagne 1 bar pour 10m)

## 3) Application : atmosphère terrestre

L'atmosphère terrestre est composée de 78% de  $N_2$ , 21% de  $O_2$ , moins d'1% de Ar et de traces telles que le  $CO_2$  et autres. Elle protège la Vie en filtrant les rayons UV solaires, en réchauffant la surface par effet de serre et en réduisant partiellement les écarts de température entre le jour et la nuit. Dans ce cours, nous allons établir 2 modèles de l'atmosphère et étudier ses impacts.

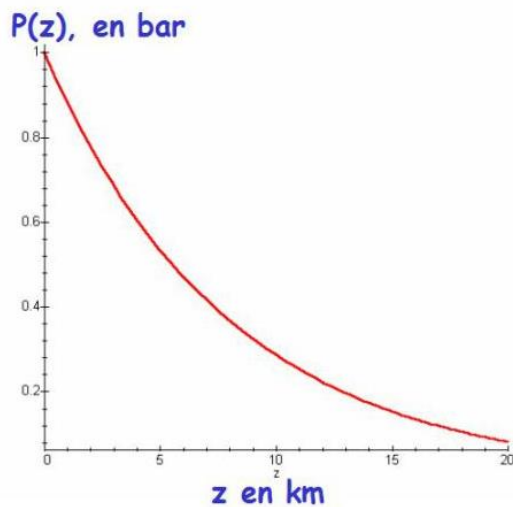
### a) Modèle isotherme

Dans ce modèle simpliste, on considère que la température est constante. On considère que l'air est un gaz parfait diatomique. D'après la relation fondamentale de la statique des fluides,  $\vec{\nabla}p = \rho \vec{g}$

D'après la loi des gaz parfaits,  $pV = nRT_0$  donc  $p = \frac{\rho RT_0}{M}$ , avec  $M = 28,8 \text{ g.mol}^{-1}$  et  $T_0 = 293 \text{ K}$

$$\text{Ainsi, } \frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT_0} p$$

En intégrant par séparation des variables, on obtient :  $p(z) = P_0 e^{-\frac{Mg}{RT_0}z}$ ,  $H = \frac{RT_0}{Mg} = 8,6 \text{ km}$  (hauteur d'échelle)



En partant du sol, la pression diminue de 1% à partir de  $z = 87 \text{ m}$

Pour affiner le modèle, on peut considérer que l'atmosphère est en réalité adiabatique, et donc prendre en compte un gradient thermique adiabatique.

## b) Modèle adiabatique

Désormais,  $T(z) = T_0 - az$

On a donc :  $\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R(T_0 - az)} dz$

En intégrant, on obtient :  $\ln\left(\frac{p}{P_0}\right) = \frac{Mg}{RT_0} \ln\left(1 - \frac{a}{T_0}z\right)$

Donc  $p(z) = P_0 \left(1 - \frac{a}{T_0}z\right)^{\frac{Mg}{aR}}$

Écrit autrement,  $p(z)T(z)^{-\frac{Mg}{aR}} = cste$

En fait, l'atmosphère est en partie sèche et en partie humide.

En écrivant le premier principe :  $dh = c_p dT = \frac{dp}{\rho} + \delta q = \frac{dp}{\rho}$

On obtient donc  $\frac{dT}{T} - \frac{R}{Mc_p} \frac{dp}{p} = 0$ , soit  $Tp^{\frac{R}{Mc_p}} = cste$

On définit ainsi la température potentielle  $\theta$  :  $\theta = T\left(\frac{p}{P_0}\right)^{-\frac{R}{Mc_p}}$

$\theta$  est conservée au cours de transformations adiabatiques, il s'agit de la température ramenée de façon adiabatique à la pression  $P_0$ .

Pour l'air sec,  $\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p}$ , avec  $c_p = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} = \frac{7R}{2M}$  pour  $\gamma = 1,4$  (gaz parfait diatomique)

Pour l'air humide, il faut tenir compte du changement d'état possible de l'eau. On parlera de transformation pseudo-adiabatique, le premier principe se réécrit :

$$c_p dT = \frac{dp}{\rho} - L dr, \text{ avec } L \text{ la chaleur latente et } r \text{ le rapport de mélange : } r = \frac{m_{\text{vapeur}}}{m_{\text{sec}}}, \frac{dp_{\text{sat}}}{dT} = \frac{L p_{\text{sat}}}{RT^2}$$

A saturation, on peut écrire :  $dr_{\text{sat}} = \frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial T} dT + \frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial p} dp$ , on peut négliger le 2<sup>e</sup> terme devant le 1<sup>er</sup>,

pour l'air humide, on a donc :  $\frac{dT}{dz} = \frac{-g}{c_p + L \frac{dr_{\text{sat}}}{dT}}$ ,  $r_{\text{sat}}$  est le rapport de mélange à saturation

$$\frac{dr_{\text{sat}}}{dT} > 0 \text{ donc } \frac{dT}{dz|_{\text{humide}}} = \Gamma_h > \frac{dT}{dz|_{\text{sec}}} = \Gamma_s$$

Une parcelle de fluide suivra, en se déplaçant verticalement, un profil de température  $\Gamma_s$  ou  $\Gamma_h$ .

L'environnement a un profil  $\frac{dT_e}{dz} = \Gamma_e$

Pour un déplacement  $\delta z$ , la température de la parcelle devient  $T_0 + \Gamma_{s,h} \delta z$  dans un environnement à la

température  $T_0 + \Gamma_e \delta z$ . La résultante des forces est donc :  $F_z = \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = \frac{\Gamma_{s,h} - \Gamma_e}{T_e} g \delta z$

Si  $\Gamma_{s,h} > \Gamma_e$ ,  $F_z$  est du signe de  $\delta z$  et le déplacement vertical sera amplifié. L'atmosphère est donc instable.

Si  $\Gamma_e > \Gamma_{s,h}$ , les forces de flottabilité s'opposent aux déplacements verticaux. L'atmosphère est donc stable.

Exemple en montagne : si on suppose un air sec, l'air suit le relief et s'élève, il subit donc une détente qui le refroidit. Puis, lorsque l'air redescend, il se réchauffe. Si l'opération a été suffisamment rapide, l'air se retrouve de l'autre côté de la montagne avec la même température. Si l'air est humide, l'eau va se condenser en montant et il y a deux possibilités : S'il ne pleut pas sur le côté face au vent, en redescendant, l'air se réchauffe et donc les gouttelettes d'eau s'évaporent à nouveau. La chaleur libérée par la liquéfaction en montant est réabsorbée par l'évaporation en descendant, l'air a donc également la même température de l'autre côté du versant. S'il pleut au sommet de la montagne, cela change les conditions, l'air a perdu une partie de son humidité au sommet de la montagne. Il y a donc moins d'eau qui s'évapore et ainsi moins de chaleur absorbée, l'air de l'autre côté du versant est donc plus chaud à altitude égale à celle de départ.

Comme on vient de le voir, l'atmosphère n'est pas homogène. Nous allons maintenant voir les conséquences de l'atmosphère sur la Vie ou encore l'utilisation des GPS.

## 4) Théorème d'Archimède

On cherche à déterminer la force résultante qu'exerce un fluide sur un corps immergé. C'est naturellement la somme (intégrale) des forces pressantes élémentaires :  $\vec{I} = \iint P(M) \vec{n} \cdot \vec{dS}$ .

Malheureusement, dans la plupart des cas, cette intégrale est tout simplement incalculable. Pourtant, on peut déterminer  $\vec{I}$  sans calculer cette intégrale.

Les forces pressantes sont des forces de surface. Ainsi, si on remplace le corps immergé par un corps quelconque mais de même surface extérieure, le résultat est le même. On peut donc le remplacer par du fluide identique à celui dans lequel on est immergé. On prend alors comme système ce volume de fluide. Puisque le fluide est en équilibre, la somme des forces appliquées ET la somme des moments

des forces appliquées sont nulles. Or, le système est soumis à son poids et à  $\vec{\Pi}$ . On en déduit immédiatement que  $\vec{\Pi} = -\rho V \vec{g}$  et qu'elle s'applique au centre de gravité du système (qui est donc le centre de masse/gravité du système constitué par le fluide).

Théorème d'Archimède : Tout corps immergé dans un fluide reçoit de la part de celui-ci une force du bas vers le haut égale au poids de liquide déplacé. Cette force d'applique au centre de masse/poussée C.

Poids apparent : lorsqu'un corps est immergé dans un fluide, il ressent en fait son poids apparent, égal à la somme vectorielle de son poids et de la poussée d'Archimède :  $\vec{P}_{app} = m\vec{g} - \rho_{fluide}V\vec{g}$

Anecdote historique : Considérer la position relative du centre de poussée C et du centre de gravité G : lors d'un léger « tangage », une des situations (G au-dessus de C) est instable.

C'est ce qui s'est passé pour le Vasa (plus grand bateau de guerre de l'époque construit à la demande du roi de Suède) lors de son voyage inaugural en 1628. Les deux ponts de canons (une première pour l'époque), très lourds, étaient responsables d'un centre de gravité G trop haut. Après quelques mètres, il a commencé à rouler à droite et à gauche jusqu'à ce que l'eau ne s'engouffre dans les fenêtres des canons. Il a ensuite coulé en quelques minutes. Sur les 150 membres d'équipage, entre 30 et 50 ont péri. Le navire allait chercher ses 300 hommes de troupe...Le bateau est resté enfoui 333 ans dans le port de Stockholm, protégé par la faible salinité et les boues du système avant d'être sorti de l'eau avec moult précautions en 1961 (on a construit un musée autour). C'est ce qui peut se produire lorsque l'on surcharge les bateaux.

## II Écoulement d'un fluide (voir [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7])

### 1) Nombre de Reynolds

Reynolds (1842-1912) était un ingénieur et physicien irlandais qui a apporté d'importantes contributions à l'hydrodynamique et à la dynamique des fluides, la plus notable étant l'introduction du nombre de Reynolds en 1883.

Le nombre de Reynolds, noté Re, caractérise les écoulements en comparant les termes d'efforts visqueux et d'accélération convective de l'équation de Navier-Stokes. Ainsi, on le définit par :

$$Re = \frac{|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}|}{|\eta\Delta\vec{v}|} = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}}$$

On note U la valeur caractéristique de la vitesse, L l'échelle caractéristique de variation de la vitesse (L est une « contrainte »), on a donc :  $Re = \frac{\rho LU}{\eta} = \frac{LU}{\nu}$ , en posant  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  la viscosité cinématique du fluide ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )

Si  $Re \ll 2000$ , les effets de viscosité dominant la convection, l'écoulement est dit laminaire

Si  $Re \gg 2000$ , le terme visqueux est négligeable, l'écoulement est dit turbulent

On notera que le phénomène qui met le plus de temps à s'établir sera le phénomène que l'on pourra négliger dans l'équation de Navier-Stokes.

	viscosité cinématique $\nu$ ( $m^2.s^{-1}$ )
air	$\nu_{air} = 10^{-5} m^2.s^{-1}$
eau	$\nu_{eau} = 10^{-6} m^2.s^{-1}$
glycérine	$\nu_{gly} = 10^{-3} m^2.s^{-1}$
miel	$\nu_{miel} = 10^{-3} m^2.s^{-1}$

Remarque : dans le cas où  $Re \ll 1$  et où on peut négliger les actions autres que celles de viscosité :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v} \text{ (on reconnaît une équation de diffusion)}$$

Quelques ordres de grandeur :

- Voiture sur l'autoroute : on prend  $L = 2m$ ,  $U = 130 km.h^{-1}$ ,  $\nu = 10^{-5} m^2.s^{-1}$

$$Re = 7.10^6 \gg 2000$$

## 2) Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

### a) Présentation

Un écoulement parfait est un écoulement sans phénomènes de transport diffusif.

Les particules de fluide évoluent de façon adiabatique. L'absence de phénomène diffusif implique des transformations réversibles. Un écoulement parfait est donc isentropique.

Dans le cas de l'écoulement parfait, on peut réécrire l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide :  $\rho(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \gg \eta \Delta \vec{v}$

Il s'agit de l'équation d'Euler. Cependant, négliger les forces de viscosité dans l'ensemble du fluide est une grosse approximation qui a ses limites.

Dans le modèle de l'écoulement parfait, on a la condition aux limites suivante au niveau d'une paroi :

$$\vec{v}_f|_{paroi} \cdot \vec{n} = \overline{v_{paroi}} \cdot \vec{n}$$

Dans le cas d'un fluide réel, le fluide adhère toujours à la paroi, c'est-à-dire :  $\vec{v}_f|_{paroi} = \overline{v_{paroi}}$

On observe ici une limite du modèle de l'écoulement parfait puisque dans ce cas la vitesse tangentielle n'est pas influencée par la présence d'un obstacle. Il faut donc prendre en compte la viscosité afin

d'avoir aussi l'égalité des composantes tangentielle. Cette zone où la viscosité n'est plus négligeable est appelée couche limite.

À la limite de la couche limite, les effets visqueux sont du même ordre de grandeur que les effets convectifs. L'épaisseur  $\delta$  de la couche limite est donc telle que  $\frac{|(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}|}{|\eta \Delta \vec{v}|} \sim 1$

$$\Rightarrow \frac{\rho V^2 / L^2}{\eta V / \delta^2} \sim 1$$

$$\Rightarrow \delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

Pour une voiture

$$V \sim \text{dizaine de } m.s^{-1}$$

$$\rho \sim 1 kg.m^{-3}$$

$$L \sim 1m$$

$$\eta \sim 10^{-5} Pa.s$$

$$\text{Donc } \boxed{\delta \sim 1mm}$$

Bilan : Un écoulement parfait est un écoulement tel que  $Re \ll 1$  et le modèle est valable uniquement en dehors des couches limites.

## b) Relation de Bernoulli

On considère un fluide newtonien et on suppose que l'écoulement est parfait, incompressible, homogène et stationnaire. On considère deux points A et B appartenant à la même ligne de courant.

Fluide incompressible : fluide tel que  $\rho = \text{cste}$  dans tout le fluide.

Si le fluide est incompressible, alors l'écoulement est incompressible

(fluide incompressible ( $\rho = \text{cste}$ )  $\rightarrow$  écoulement incompressible ( $div(\vec{v}) = 0$ ))

D'après les hypothèses, on utilise l'équation d'Euler (écoulement parfait),  $\rho = \text{cste}$  sur une ligne de courant (écoulement incompressible) et  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$  (écoulement stationnaire).

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v} = \overrightarrow{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

En prenant en compte les forces volumiques conservatives autres que le poids, on peut écrire :

$$\vec{f}_v = -\overrightarrow{grad}(E_p)$$

L'équation d'Euler se réécrit :  $\rho \left( \overrightarrow{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = -\overrightarrow{grad}(p) + \rho \vec{g} - \overrightarrow{grad}(E_p)$

Donc  $\overrightarrow{grad} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + E_p + p \right) + \rho \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$



La circulation du fluide sur la ligne de courant s'écrit :

$$\int_A^B \overrightarrow{grad} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + E_p + p \right) \cdot \overrightarrow{dl} + \int_A^B \rho \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

Or, par définition d'une ligne de courant,  $\overrightarrow{dl}$  est parallèle à  $\vec{v}$  donc orthogonal à  $\overrightarrow{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$

De plus  $\overrightarrow{grad}(f) \cdot \overrightarrow{dl} = df$

Finalement,  $P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + E_p = cste$

Remarque : la démonstration peut se faire à partir du 1<sup>er</sup> principe industriel :

$$h_B - h_A + \frac{1}{2}(v_B - v_A) + g(z_B - z_A) + E_{p,B} - E_{p,A} = 0$$

Or,  $dh = Tds + \frac{dP}{\rho}$  donc  $h_B - h_A = \frac{p_B - p_A}{\rho}$

On peut également démontrer cette relation à partir du théorème de la puissance cinétique, en admettant que la puissance des actions internes est nulle pour un écoulement parfait et incompressible.

La relation de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie totale le long d'une ligne de courant

Remarques :

- Pour quantifier le fait qu'un fluide soit compressible ou non, on utilise le coefficient d'incompressibilité isentropique  $\chi_S = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S \rightarrow \frac{\Delta \rho}{\rho} = \chi_S \Delta p$

Or, en utilisant l'approximation acoustique :  $\chi_S = \frac{1}{\rho c^2}$  (**voir plus bas**)

De plus, en utilisant la relation de Bernoulli,  $\Delta p \sim \rho v^2$

On définit alors le nombre de Mach :  $M = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$

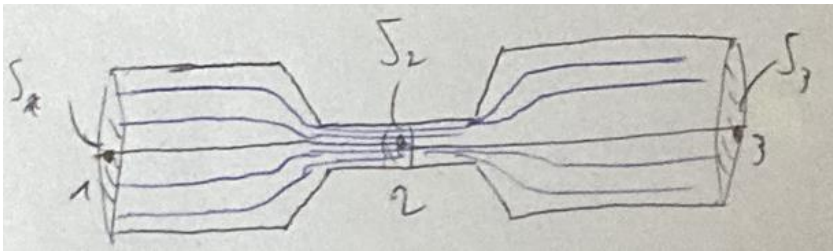
Par convention, un fluide est considéré incompressible si  $M < 0,3$ , ce qui correspond à une variation relative de masse volumique dans l'écoulement d'environ 10%.

- Si l'écoulement n'est pas stationnaire, on remplace la constante de la relation de Bernoulli par une fonction dépendant du temps
- Si l'écoulement est irrotationnel, on peut se passer de l'hypothèse de stationnarité (terme  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  apparaît en plus, avec  $\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\varphi)$ )

Nous allons maintenant voir comment utiliser ce théorème dans des cas concrets et utiles dans la vie de tous les jours.

### c) Applications

- Effet Venturi



Le fluide est incompressible donc  $D_{v1} = D_{v2} = D_{v3}$ , soit  $S_1c_1 = S_2c_2 = S_3c_3$

Comme  $S_1 > S_2$ , on a  $c_1 < c_2$

D'après la relation de Bernoulli (entre 1 et 2),  $P_1 + \rho gz_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 = P_2 + \rho gz_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2$

Si le tuyau est horizontal,  $z_1 = z_2$

Ainsi,  $P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(c_1^2 - c_2^2) = P_1 - \frac{1}{2}\rho c_1^2 \left( \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right) < P_1$

➔ Chute de pression au niveau de l'étranglement

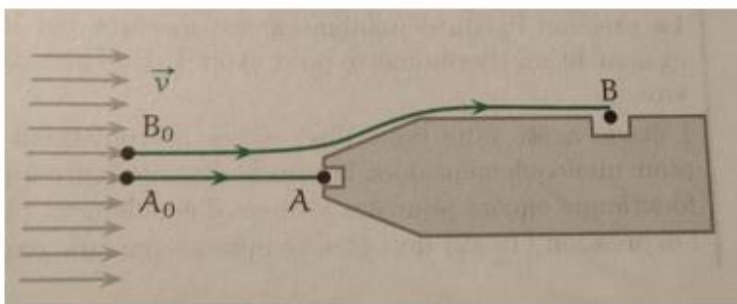
Remarque :  $P_2$  pourrait devenir inférieur strictement à  $P_{sat}$  : phénomène de cavitation, apparition de bulles de gaz

En appliquant le même raisonnement, entre 2 et 3 (ou 1 et 3), si  $S_3 = S_1$ , le fluide devrait retrouver les mêmes propriétés en 3 qu'en 1. En pratique,  $P_3 < P_1$  (cf pertes de charge)

On retrouve l'effet Venturi dans les zones montagneuses par exemple, et on l'utilise pour les trompes hydrauliques et les trompes à eau, certaines cheminées, les pompes à essence...

Autre exemple dans la vie de tous les jours : une porte qui claque

- Tube de Pitot



Ce dispositif permet de remonter à la vitesse de l'écoulement en mesurant une différence de pression.

A est un point d'arrêt, donc  $v_A = 0$ .

On applique la relation de Bernoulli entre  $A_0$  et A :  $\frac{P_{A_0}}{\rho} + \frac{v_{A_0}^2}{2} + gz_{A_0} = \frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A$

Si A et  $A_0$  sont à la même altitude, on a :  $P_A = P_{A_0} + \frac{1}{2}\rho v_{A_0}^2$

On obtient une relation similaire entre  $B_0$  et  $B$ .  $A_0$  et  $B_0$  sont très voisins, leurs propriétés sont identiques. En pratique, on peut négliger  $z_B - z_A$ . L'écoulement longe le tube,  $v_B$  vaut environ  $v$ .

On obtient donc 
$$v = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho}}$$

Application :

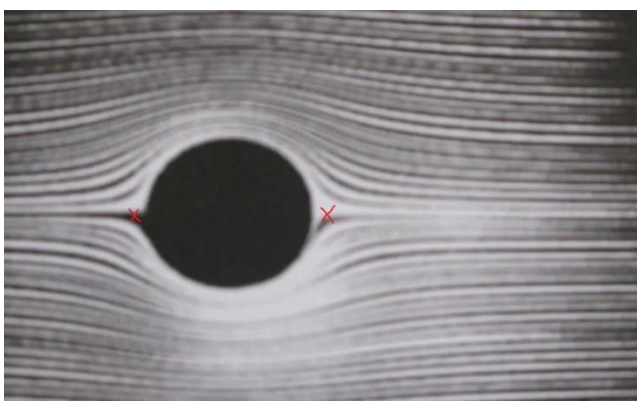


### 3) Écoulements visqueux

Le modèle de fluide parfait présente de nombreuses limites, notamment dans la prise en compte des effets aux interfaces, on peut penser au paradoxe de D'Alembert par exemple : On considère une sphère de rayon  $R$  plongée dans un écoulement d'un fluide incompressible ( $div(\vec{v}) = 0$ ) et irrotationnel ( $\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ ) (écoulement potentiel). Cette sphère est plongée dans un champ de vitesse  $\vec{V}_\infty$ . On peut montrer que le potentiel s'écrit :  $\Phi = V_\infty \cos(\theta)(r + \frac{R^3}{2r^2})$ , on a alors :

$$\vec{v} = V_\infty \cos(\theta) \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \vec{e}_r - V_\infty \sin(\theta) \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) \vec{e}_\theta, \text{ en } r = R, v_r = 0 \text{ et } v_\theta = -\frac{3}{2} V_\infty \sin(\theta)$$

Pour  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ ,  $v_\theta = 0$  (on parle de points d'arrêt)



En utilisant la relation de Bernoulli, on peut calculer le champ de pression :  $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} V_\infty^2$

En  $r = R$ , la pression vaut :  $P(R) = P_0 + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2(\theta)\right)$

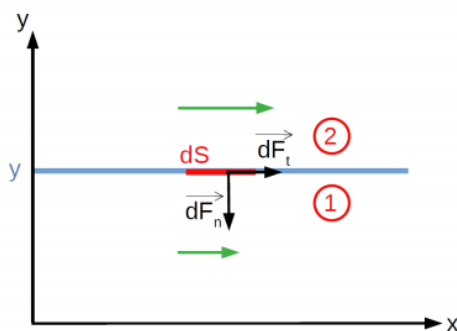
En intégrant sur la sphère :  $\vec{F} = - \oint P(R) \vec{dS}$ , avec  $dS = R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$ , on trouve  $\vec{F} = \vec{0}$  !

La résultante des forces de pression est donc nulle sur la sphère, sauf que non : la sphère est emportée par l'écoulement.

Une amélioration du modèle du fluide parfait consiste en la prise en compte de la viscosité du fluide dont on peut observer un effet à travers une manip simple : une burette contient uniquement de l'eau tandis qu'une autre contient un mélange eau-glycérol à 5/6 d'eau en volume. On observe que le mélange s'écoule plus lentement que l'eau pure, or dans un modèle ne prenant en compte que l'action de pesanteur, la masse volumique n'intervient pas dans l'équation déterminant la vitesse donc les deux fluides devraient s'écouler à la même vitesse. Il y a donc une action autre que la pesanteur qui freine l'écoulement, il s'agit de la viscosité du fluide. On va s'intéresser ici à développer le modèle d'écoulement associé aux effets visqueux, qui permet au passage de lever le paradoxe de D'Alembert.

### a) Notion de viscosité

On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. On considère un écoulement inhomogène et incompressible tel que  $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$ . On suppose que l'écoulement est visqueux, on note  $\eta$  la viscosité. On schématise l'écoulement de la manière suivante :



Comme on a pu le constater dans le cas des burettes, un fluide visqueux semble subir une force de "frottements" lors de son écoulement, ce qui le ralentissait dans le cas de la burette. Ici, en considérant la viscosité comme une action de frottements, on voit bien que si au niveau de l'interface le fluide dans la couche 2 s'écoule plus vite que celui dans la couche 1, il va alors entraîner le fluide de la couche 1 et inversement, le fluide de la couche 1 va freiner celui de la couche 2. Cela peut se résumer dans l'expression d'une contrainte tangentielle :  $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \eta dS \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e}_x$

On voit bien dans cette expression que la contrainte tangentielle tend à accélérer le fluide de la couche 1 si le fluide de la couche 2 s'écoule plus rapidement, car au niveau de l'interface on aurait  $\frac{\partial v_x}{\partial y} > 0$ .

La force de viscosité est introduite par une inhomogénéité de vitesse,  $\eta$  est le coefficient de viscosité dynamique (en Pa.s ou Pl). Quelques ordres de grandeur ;

$$-\eta_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ Pa.s (20°C)}$$

$$-\eta_{\text{air}} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s (20°C)}$$

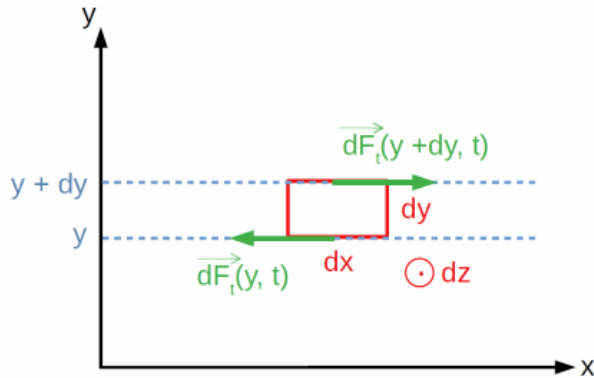
$$-\eta_{\text{miel}} = 10 \text{ Pa.s (20°C)}$$

$$-\eta_{\text{glycérine}} = 1,5 \text{ Pa.s (20°C)}$$

$$-\eta_{\text{magma}} = 100 \text{ Pa.s (basaltique, 1200°C)}$$

Remarque : le résultat précédent ne s'applique qu'aux fluides newtoniens, pour lesquels la contrainte visqueuse est proportionnelle aux déformations du fluide, ce qui implique notamment que  $\eta$  est constante. En fait  $\eta$  dépend de la température.

On considère une particule de fluide de volume  $d\tau = dx dy dz$  dans l'écoulement précédent.



La particule la force de viscosité en  $y$  et en  $y + dy$  :

$$d\vec{F}_{tot} = d\vec{F}_t - d\vec{F}_t(y, t)$$

Or d'après l'expression de  $d\vec{F}_t(y, t)$  :

$$d\vec{F}_{tot} = \eta dS \frac{\partial v_x}{\partial y}(y + dy, t) \vec{e}_x - \eta dS \frac{\partial v_x}{\partial y}(y, t) \vec{e}_x \text{ avec } dS = dx dz$$

$$\text{Donc } d\vec{F}_{tot} = \eta d\tau \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y, t) \vec{e}_x$$

On en déduit l'expression de la force volumique :  $\vec{f}_v = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y, t) \vec{e}_x$

On généralise dans le cas 3D :  $\vec{f}_v = \eta \Delta \vec{v}$

La particule subit également les forces de pression et d'autres forces volumiques. En appliquant la 2<sup>e</sup> loi de Newton, on obtient :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad}P + \vec{f}_{vol} + \eta \Delta \vec{v}, \text{ souvent } \vec{f}_{vol} = \rho \vec{g}, \text{ force volumique de pesanteur}$$

Cette équation est appelée équation de Navier-Stokes.

Cette équation est valable pour un écoulement incompressible, on a donc en plus de cette équation :  $\text{div}(\vec{v}) = 0$

On obtient les nouvelles conditions aux limites au niveau d'une paroi :

$$-\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{paroi}$$

-continuité de la contrainte normale, c'est-à-dire la pression

-continuité de la composante tangentielle

Remarque : dans le cas d'un fluide compressible, la force volumique de viscosité prend la forme :

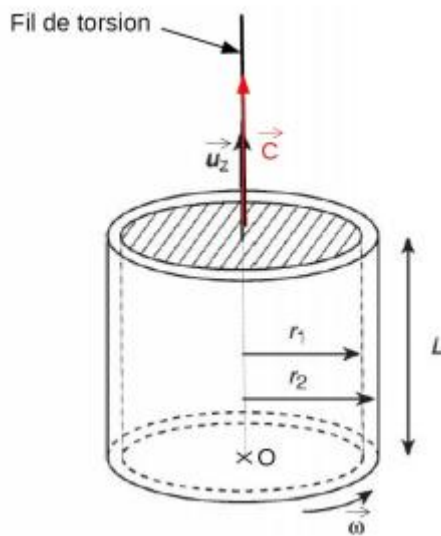
$\vec{f}_v = \eta \Delta \vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v}))$ , avec  $\zeta$  le 2<sup>e</sup> coefficient de viscosité, il peut s'interpréter comme un coefficient de friction dû à la déformation de la particule fluide au cours de son mouvement, ce qui équivaut à des frottements internes.

## b) Exemples d'écoulements visqueux

- Viscosimètre de Couette

Voir [5]

On considère une particule de fluide, considéré incompressible, de masse volumique  $\rho$ , de viscosité dynamique  $\eta$ , entre deux cylindres d'axe (Oz) de rayons  $r_1$  et  $r_2 > r_1$ . Le cylindre 2 tourne autour de (Oz) à la vitesse  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ , le cylindre 1 est immobile en régime stationnaire fait un angle  $\alpha$  par rapport à sa position initiale.



On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et on utilise les coordonnées cylindriques.

Invariance du système par rotation d'angle  $\theta$  autour de (Oz), invariance par translation selon (Oz) (étant donné que  $L \gg r_1, r_2$ )

Donc la pression et la vitesse ne dépendent que de  $r$ .

Le fluide étant incompressible,  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ , donc  $\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

On en déduit  $\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0$  donc  $rv(r) = \text{cste}$

Or, par condition d'imperméabilité,  $v_r(r_1) = 0$ , donc pour tout  $r$ ,  $v(r) = 0$

Les forces de pression étant normales à la surface du cylindre intérieur, elles ne peuvent pas être à l'origine de l'angle de torsion observé à l'équilibre. cela s'explique donc par la viscosité. En régime permanent l'équation de Navier-Stokes donne :

$$\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

En projetant cette équation selon  $\vec{e}_\theta$ , on obtient :

$$\left(\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) v_\theta(r) = \eta \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r^2}\right) = 0 \text{ donc } \frac{d}{dr} \left(\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r}\right) = 0$$

Ainsi, en posant  $v_\theta(r) = \frac{\alpha(r)}{r}$  on obtient  $\frac{1}{r} \frac{d\alpha}{dr} = K_1$  donc  $\alpha(r) = \frac{K_1 r^2}{2} + K_2$

$$\text{Donc } v_\theta(r) = \frac{K_1 r}{2} + \frac{K_2}{r}$$

Conditions aux limites :  $v(r_1) = 0$  donc  $K_2 = -\frac{K_1 r_1^2}{2}$  et  $v(r_2) = r_2 \omega$  donc  $K_1 = \frac{2\omega r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$

$$\text{Ainsi, } v_\theta(r) = \frac{\omega r_2^2}{r} \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

On s'intéresse à la force tangentielle exercée par le fluide sur le cylindre interne 1. On suppose que toutes les forces selon  $\vec{e}_z$  sont compensées par la tension du fil. On a :

$$d\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow 1} = \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{r=r_1} dS \vec{e}_\theta = \frac{2\eta \omega r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} dS \vec{e}_\theta$$

On en déduit le moment exercé par cette force par rapport à l'axe (Oz) :  $d\Gamma = \frac{2\eta \omega r_2^2 r_1}{r_2^2 - r_1^2} dS$

On obtient alors le couple exercé par le fluide sur le cylindre en intégrant sur l'ensemble de la surface du cylindre 1 :  $\Gamma = \frac{4\pi \eta \omega r_2^2 r_1^2 L}{r_2^2 - r_1^2}$

D'après le théorème du moment dynamique appliqué au cylindre 1, sur l'axe (Oz), en régime permanent :  $0 = \Gamma - C\alpha$ , d'où :  $\eta = \frac{C(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi \omega r_2^2 r_1^2 L} \alpha$

On peut alors en déduire la valeur de  $\eta$  à partir de la mesure de  $\alpha$ .

Remarque : les calculs ont été menés en négligeant les effets de bord, on a donc une idée de comment remonter à  $\eta$  mais le modèle est à améliorer

- Chute de pression dans une conduite horizontale

Pour un écoulement stationnaire, homogène et incompressible, à faible Re, pour une conduite horizontale de longueur L et de rayon R, le débit volumique est relié à la chute de pression  $\Delta P$ .

On peut montrer par le calcul que  $D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P$  (loi de Hagen-Poiseuille)

De manière analogue à l'électricité, on peut définir une résistance hydraulique :  $R_H = \frac{\Delta P}{D_v} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

Pour un cylindre de même géométrie, la résistance électrique est :  $R = \frac{L}{\sigma \pi R^2}$ , avec  $\sigma$  la conductivité électrique. La résistance électrique varie en  $R^{-2}$ , la résistance hydraulique varie en  $R^{-4}$ .

Ex : écoulement du sang dans le système artériel

On peut représenter de manière très schématique l'écoulement dans le système artériel par un réseau de tubes qui se subdivisent de plus en plus à partir de l'aorte jusqu'aux plus fins capillaires. On peut classer les vaisseaux en 5 étages de ramifications : aorte (1) – grosses artères (40) – branches artérielles (7100) – artérioles ( $1,6 \cdot 10^8$ ) – capillaires ( $5,5 \cdot 10^9$ ). Débit sanguin :  $5 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$

étage	N	$d$ (cm)	$S$ (cm <sup>2</sup> )	$V$ (cm <sup>3</sup> )	$L$ (cm)
aorte	1	2,6	5,3	180	34
grosses artères	40	0,8	20	250	12,5
branches artérielles	7 100	0,06	20	250	12,5
artérioles	$1,6 \times 10^8$	0,002	500	125	0,25
capillaires	$5,5 \times 10^9$	0,000 9	3 500	300	0,086

On pourrait calculer  $Re$  pour chaque partie du système artériel et montrer que l'écoulement peut être considéré comme un écoulement de Poiseuille, excepté au premier étage (aorte).

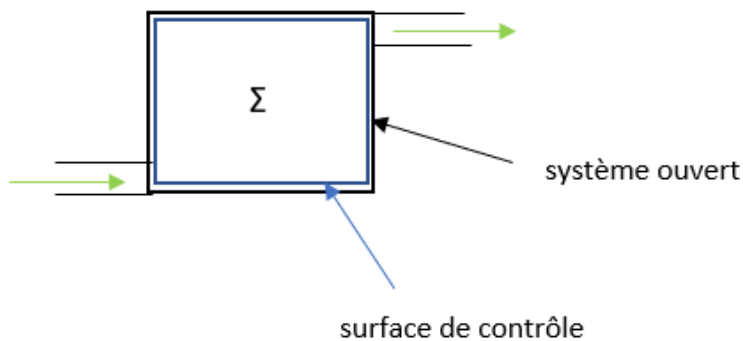
### III Bilans macroscopiques ([1])

#### 1) Systèmes ouverts/fermés et surfaces de contrôle

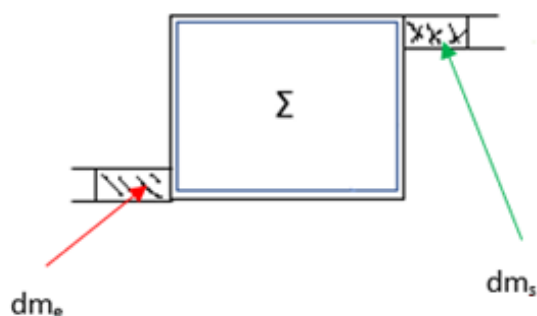
système fermé : pas d'échange de matière

système ouvert : échange de matière

surface de contrôle : surface fermée fixe qui délimite le système ouvert à étudier, il existe une surface d'entrée et une surface de sortie au niveau de la surface de contrôle



⇒ On définit un système fermé, qu'on note  $\Sigma^*$





$$\Sigma^*(t) = \Sigma(t) + dm_e \text{ et } \Sigma^*(t + dt) = \Sigma(t + dt) + dm_s$$

$dm_e$  est la masse de fluide qui va entrer dans  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$ ,  $dm_s$  est la masse de fluide qui va sortir de  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$

1<sup>e</sup> Application : bilan de masse

$$m_{\Sigma^*}(t) = m_{\Sigma}(t) + dm_e \text{ et } m_{\Sigma^*}(t + dt) = m_{\Sigma}(t + dt) + dm_s$$

On a donc  $dm_{\Sigma^*} = m_{\Sigma^*}(t + dt) - m_{\Sigma^*}(t) = dm_{\Sigma} + dm_s - dm_e = 0$  car  $\Sigma^*$  est fermé.

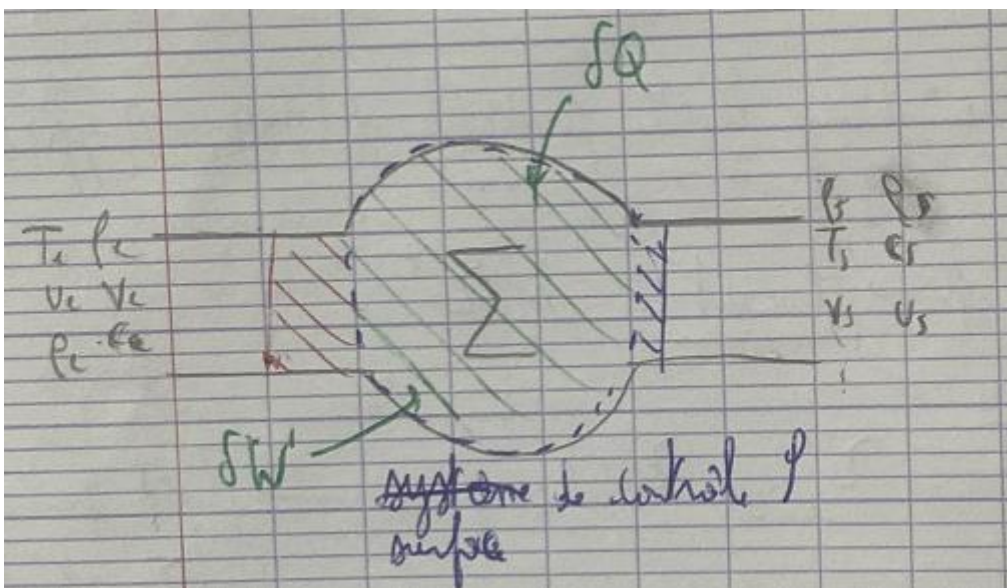
$$\text{Donc : } \frac{dm_{\Sigma}}{dt} = D_{m,e} - D_{m,s}$$

En régime permanent :  $D_{m,e} = D_{m,s}$  ou  $dm_e = dm_s$

Méthode d'étude :

- identifier le système ouvert  $\Sigma$ , en déduire le système fermé  $\Sigma^*$
- bilan de masse
- bilan de la grandeur  $X$  d'intérêt entre  $t$  et  $t + dt \rightarrow dX$
- appliquer théorème/loi/principe sur  $X$  à  $\Sigma^* \rightarrow dX$
- conclure en égalisant les deux expressions de  $dX$

## 2) Bilan d'énergie



Bilan de masse :

$$dm_{\Sigma^*} = dm_{\Sigma} + dm_s - dm_e \text{ et } dm_{\Sigma^*} = 0 \text{ (système fermé), } dm_{\Sigma} = 0 \text{ (régime permanent)}$$

$$\text{Donc } dm_e = dm_s = dm$$

Bilan d'énergie :

$$E_{\Sigma^*}(t) = U_{\Sigma^*}(t) + E_{c\Sigma^*}(t) = E_{\Sigma}(t) + u_e dm + \frac{1}{2} c_e^2 dm$$

$$E_{\Sigma^*}(t + dt) = E_{\Sigma}(t + dt) + u_s dm + \frac{1}{2} c_s^2 dm$$

$$dE_{\Sigma^*} = dE_{\Sigma} + (u_s - u_e) dm + \frac{1}{2} (c_s^2 - c_e^2) dm$$

Appliquons le premier principe :  $dE_{\Sigma^*} = dU_{\Sigma^*} + dE_{c\Sigma^*} = \delta W' + \delta Q + \delta W_t = w_u dm + q dm + \delta W_t$

$\delta W_t$  est le travail des forces de pression qui permet au fluide d'avancer,  $\delta W_t = P_e v_e dm - P_s v_s dm$

$$\Leftrightarrow (u_s - u_e) dm + \frac{1}{2} (c_s^2 - c_e^2) dm = (w_u + q + P_e v_e - P_s v_s) dm$$

$$\Leftrightarrow u_s + P_s v_s - (u_e + P_e v_e) + \frac{1}{2} (c_s^2 - c_e^2) = w_u + q$$

$$\Leftrightarrow h_s - h_e + \frac{1}{2} (c_s^2 - c_e^2) = w_u + q$$

On obtient le premier principe pour un système ouvert en écoulement permanent :

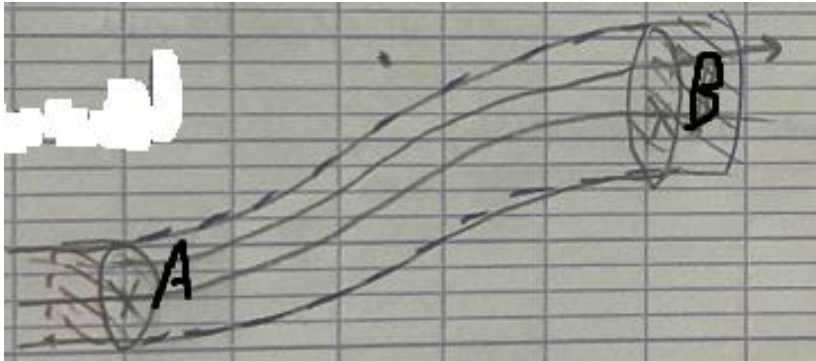
$$\Delta \left( h + \frac{c^2}{2} \right) = w_u + q$$

On peut le réécrire :

$$D_m \Delta \left( h + \frac{c^2}{2} \right) = P_u + P_{th}$$

Si l'entrée et la sortie sont à des altitudes différentes, un terme d'énergie potentielle de pesanteur existe dans  $w_u$  :  $w_u = w'_u - (gz_s - gz_e)$

Pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène :



Le premier principe en écoulement permanent s'écrit donc :  $h_B - h_A + gz_B - gz_A + \frac{1}{2} (c_B^2 - c_A^2) = 0$

L'écoulement est homogène donc la masse volumique est constante.

L'identité thermodynamique s'écrit :  $dh = T ds + \frac{dP}{\rho} \rightarrow \Delta h = h_B - h_A = \frac{P_B - P_A}{\rho}$

L'absence de phénomène diffusif implique que l'écoulement est réversible.

Ainsi, on obtient :  $\frac{P_B}{\rho} + gz_B + \frac{1}{2} c_B^2 = \frac{P_A}{\rho} + gz_A + \frac{1}{2} c_A^2$

On a retrouvé la relation de Bernoulli

### 3) Bilan dynamique

#### a) Poussée d'une fusée

On considère une fusée de masse  $m(t)$  en mouvement sur la verticale ascendante dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen, soumise au champ de pesanteur, supposé uniforme. Les gaz sont éjectés avec un débit massique  $D_m$ ,  $m(t) = m(0) - D_m t$ . Les gaz sont éjectés à la vitesse  $\vec{u}$ .

A l'instant  $t$  :  $\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$

A l'instant  $t + dt$  :  $\vec{p}(t + dt) = m(t + dt)\vec{v}(t + dt) - dm(\vec{u} + \vec{v})$ , avec  $dm = -D_m dt$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} + D_m dt \vec{u} - dm \vec{v}$$

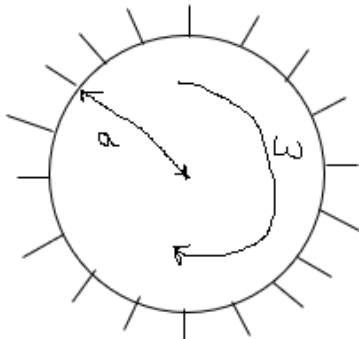
Donc  $\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u}$

D'après la 2<sup>e</sup> loi de Newton :  $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{g}$

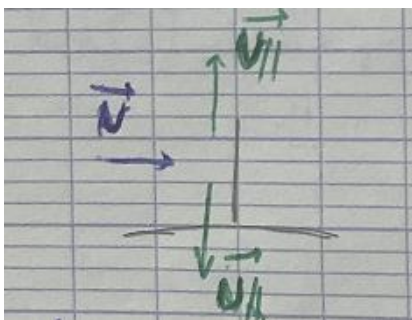
Ainsi,  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - D_m \vec{u}$

Il y a décollage si  $\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_z > 0$ , c'est-à-dire si  $D_m |\vec{u}| > m |\vec{g}|$

#### b) Étude d'une turbine



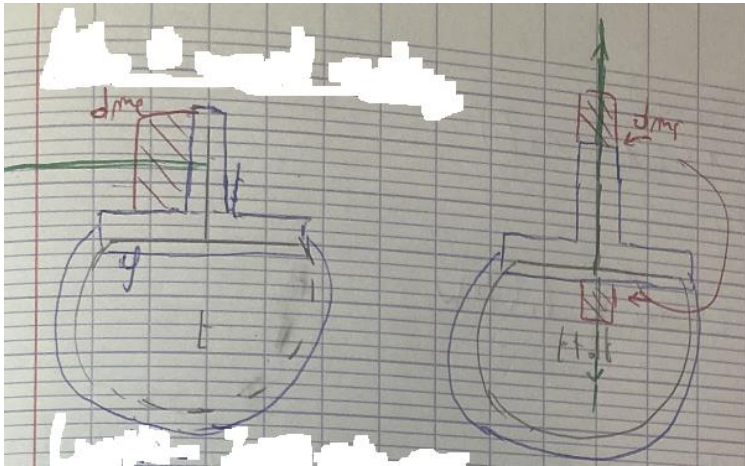
Le rotor est en liaison pivot parfaite d'axe  $O_z$ , on note  $J$  son moment d'inertie. On suppose un couple résistif  $-\Gamma$  constant. Dans le référentiel terrestre, jet d'eau incident à  $\vec{v}$  sur l'auget :



Après contact avec l'auget, l'eau est défléchiée avec une vitesse  $\pm \vec{v}'$  dans le référentiel de la roue.

Dans le référentiel terrestre,  $\vec{u}_{auget} = \vec{u} = a\omega \vec{e}_x$

### Bilan de moment cinétique :



$$L_{\Delta\Sigma^*}(t) = J\omega(t) + avdm$$

$$L_{\Delta\Sigma^*}(t + dt) = J\omega(t + dt) + audm$$

$$\frac{dL_{\Delta\Sigma^*}}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} + aD_m(u - v) = -\Gamma$$

$$\text{Donc } J \frac{d\omega}{dt} = aD_m(v - a\omega) - \Gamma$$

$$\text{Régime permanent pour le rotor : } \Gamma = D_m a(v - a\omega)$$

Ordre de grandeur : centrale hydroélectrique

$$D_m = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}, \omega \sim 600 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}, v \sim 10^2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, a \sim 1 \text{ m}$$

$$\text{Donc } \Gamma = 40 \text{ kN}$$

$$P = \Gamma\omega = 2,4 \text{ MW}$$

## IV Phénomènes interfaciaux (voir [10], [11], [12], [13], [14])



Dans la vie quotidienne, dans certaines situations, des fluides prennent des formes géométriques particulières, on a tous par exemple observé des bulles de savons ou des gouttes d'eaux sphériques, et on a tous déjà observé un ménisque se former dans un tube suffisamment fin contenant de l'eau.

Si on fait cette expérience avec le mercure, l'interface est courbée dans l'autre sens, ce qui paraît encore plus déroutant. Dans ce cours, nous allons essayer de comprendre quel est la force qui pousse le fluide à adopter des surfaces si particulières.

## 1) Tension superficielle

### a) Origine physique

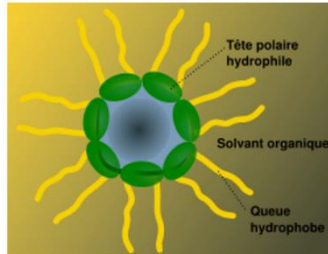
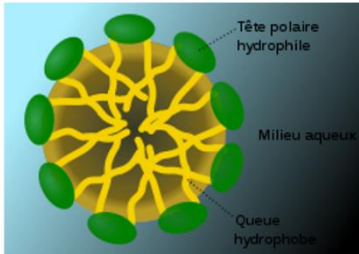
Considérons un fluide, par exemple un liquide, à une interface avec un gaz. En volume, une molécule du liquide interagit avec les autres molécules du liquide, ce qui renforce la cohésion donc abaisse l'énergie totale du fluide. Les molécules à l'interface sont entourées de moins de voisins et ont par conséquent des interactions plus faibles avec la phase gazeuse. Ainsi, l'interface avec le gaz est défavorable énergétiquement pour le liquide. On peut donc associer à l'interface entre le fluide et le gaz un travail élémentaire qu'il faut fournir au fluide pour augmenter sa surface d'un élément infinitésimal de surface  $d\Sigma$  :  $\delta W = \gamma d\Sigma$ , avec  $\gamma$  le coefficient de tension superficielle (en  $\text{J.m}^{-2}$ ).

A partir de notre analyse microscopique, on peut dire que l'énergie de surface va être de l'ordre de  $E_s \approx \varepsilon N_s$ , avec  $N_s = \frac{S}{a^2}$  le nombre de molécules présentes à l'interface,  $a$  représente la taille d'une molécule de fluide,  $\varepsilon = k_B T$ , ainsi :  $\gamma \approx \frac{k_B T}{2a^2}$

Cette formule donne effectivement le bon ordre de grandeur ( $\gamma = 20 \text{ mJ.m}^{-2}$  à  $20^\circ\text{C}$ ) pour des huiles, ou pour des molécules comme le méthanol ou l'octane. Pour l'eau, on obtient une valeur plus importante ( $\gamma_{\text{eau}} = 72 \text{ mJ.m}^{-2}$  à  $20^\circ\text{C}$ ). Ceci s'explique par la présence de liaisons hydrogènes, plus fortes que les liaisons de Van der Waals, ce qui augmente la cohésion entre les molécules du fluide. Enfin, on obtient une valeur beaucoup plus importante dans les métaux comme le mercure ( $\gamma = 436 \text{ mJ.m}^{-2}$  à  $20^\circ\text{C}$ ), ce qui s'explique par la valeur plus importante de l'énergie des liaisons métalliques. Un fluide va avoir tendance à minimiser sa surface pour minimiser son énergie de surface.

Il reste cependant un point obscur, on vient de dire qu'il était énergétiquement défavorable pour un fluide d'augmenter la valeur de sa surface. Pourtant, il est très simple de faire des bulles de savon. Cela est dû à la structure des tensioactifs. Ceux-ci possèdent une structure particulière : il s'agit de composés formés d'une tête acide polaire partiellement ionisée, et d'une longue queue constituée de radicaux  $\text{CH}_2$ . En présence d'eau, la molécule se dispose de façon à placer sa tête polaire du côté de l'eau (on dit que la tête est hydrophile) et sa queue aliphatique vers le milieu extérieur (queue hydrophobe). Pour cette raison, on parle de composés amphiphiles. Cette interposition des molécules tensioactives entre les deux fluides diminue les interactions directes entre leurs molécules et, de ce fait, diminue la tension interfaciale par suite de l'affinité du surfactant pour chacun des deux fluides. Il devient alors énergétiquement moins défavorable pour le système d'accroître l'aire de l'interface entre les deux fluides.

## Rôle des tensioactifs



### b) Loi de Laplace

On peut définir  $\gamma$  via la thermodynamique (**voir thermodynamique**). En effet, une variation élémentaire de l'interface du fluide nécessite un travail  $\delta W = \gamma d\Sigma$ . L'expression infinitésimale du premier principe est alors :

$$dU = -pdV + TdS + \gamma d\Sigma$$

Le système est en contact avec un thermostat à la température  $T_0$  jouant aussi le rôle de réservoir de volume, maintenant une pression  $p_0$ . Dans ces conditions, le potentiel thermodynamique permettant de décrire l'équilibre thermodynamique est  $G_0 = U - T_0S + p_0V$ . On rappelle que  $dG_0$  diminue au cours d'une transformation spontanée et est minimale à l'équilibre. L'équilibre thermodynamique est donc donné par :  $dG_0 = 0 = dU - T_0dS + p_0dV$

Si on écrit la variation infinitésimale du volume  $dV = 4\pi r^2 dr$  et  $d\Sigma = 8\pi r dr$  et de la surface du système sphérique en fonction du rayon, on obtient :  $(T - T_0)dS - \left(p - p_0 - \frac{2\gamma}{r}\right) dV = 0$

L'équilibre thermodynamique est donc donné par  $T = T_0$  et surtout :  $p = p_0 + \frac{2\gamma}{r}$

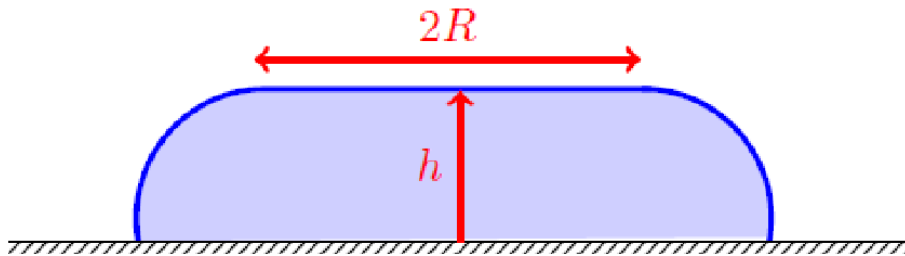
Cette dernière équation porte le nom de Loi de Laplace. Elle traduit l'équilibre mécanique entre les forces de pressions qui ont tendance à faire éclater la bulle tandis que les forces de tensions superficielles ont tendance à faire diminuer le rayon de la bulle. Pour une bulle de savon, il faut prendre en compte l'existence de deux interfaces, la loi de Laplace s'écrit dans ce cas :  $p = p_0 + \frac{4\gamma}{r}$

### c) Compétition avec la gravité

Les phénomènes de tension superficielle peuvent entrer en compétition avec la gravité. Par exemple, dans le cas d'une goutte, les forces de gravité ont tendance à aplatir la goutte alors que la tension de surface rend la goutte sphérique. On peut définir un nombre qui représente la compétition entre ces deux forces et qui va permettre de définir un régime dans lequel les forces de capillarité dominent

devant la force de gravité. Pour cela, on considère une goutte à peu près sphérique. A l'intérieur de la goutte, il y a une surpression due à la tension de surface :  $\Delta p_{surf} = \frac{2\gamma}{R}$

La gravité est responsable d'une force de pression qui aplatit la goutte :  $\Delta p_{grav} = \rho g \Delta z$

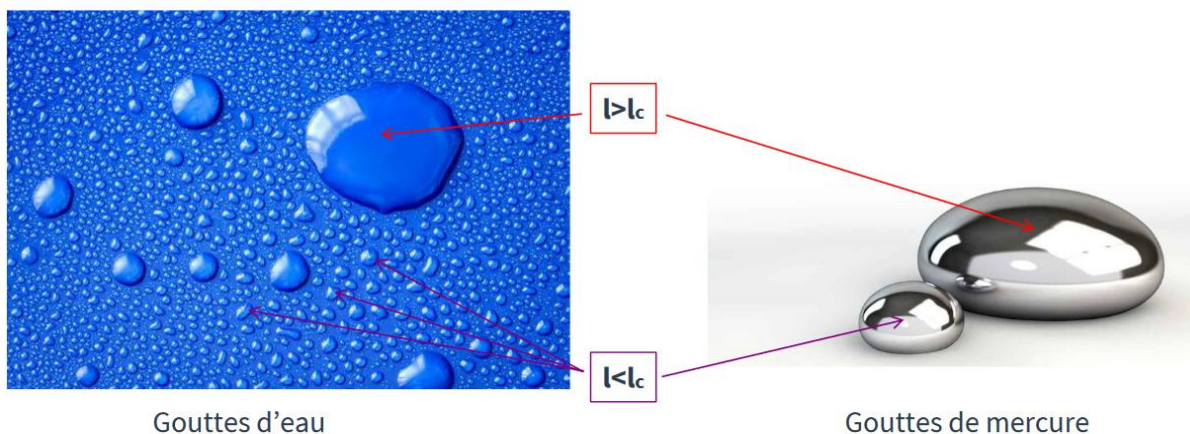


On peut estimer que  $\Delta z = 2R$  si la goutte n'est pas trop déformée. On définit alors le nombre de Bond comme :  $B_o = \frac{\Delta p_{grav}}{\Delta p_{surf}} = \frac{\rho g}{\gamma} R^2$

Ce nombre sans dimension permet de différencier deux régimes (c'est un peu l'analogue du nombre de Reynolds),  $B_o \gg 1$  si les forces de gravité dominent,  $B_o \ll 1$  si les forces de tension superficielle sont prédominantes. En prenant  $B_o = 1$ , on peut définir une échelle de longueur  $\lambda_c$  en-dessous de laquelle les forces de tension superficielle dominent. Son expression est donnée par :  $\lambda_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$

Voir [10]

Pour le mercure,  $\gamma(20^\circ\text{C}) = 436 \text{ mJ}\cdot\text{m}^{-2}$  et  $\rho = 13,610^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  d'où  $\lambda_c = 1,8 \text{ mm}$ . On retrouve cet ordre de grandeur de 2 mm pour la plupart des fluides. Les gouttes restent donc sphériques tant que leur taille ne dépasse pas quelques millimètres. On peut avoir des gouttes beaucoup plus grosses dans des situations de microgravité (voir [11]).



Gouttes d'eau

Gouttes de mercure

Cette compétition est à l'origine du ménisque que l'on peut voir dans une burette par exemple, quand on fait un titrage en chimie. De même, il reste toujours une goutte accrochée à la burette : la goutte est en fait retenue par la tension de surface. D'ailleurs, si on connaît la masse de cette goutte, on peut remonter à la tension de surface (méthode de la goutte pendante).

On vient de voir que le fluide prenait des formes géométriques particulières qui correspondent à la minimisation de son interface. On va maintenant voir que les effets de surface interviennent également dans les transitions de phases.

## 2) La nucléation (**voir thermodynamique**)

La nucléation est le phénomène suivant lequel apparaissent les premiers germes cristallins d'une phase solide ou d'un composé.

### a) Retard aux changements d'état

On observe dans la vie courante des retards aux changements d'état, c'est-à-dire des changements d'état qui n'ont pas lieu aux températures ou aux pressions habituelles. La formation du verglas en est un exemple. En effet, celui-ci se forme quand des gouttes d'eau liquide traversent une zone froide de l'atmosphère, elles sont alors liquides bien qu'à une température inférieure à  $0^{\circ}\text{C}$ , jusqu'au moment où elles rencontrent le sol et se solidifient. C'est ainsi que la ville de Vladivostok en Russie s'est retrouvée couverte de glace. Un autre exemple est celui du diamant, qui devrait être sous forme de graphite à température et pression ambiantes, mais qui est dans un état métastable et reste (heureusement) sous forme de diamant.

## Retards aux changements d'état



Le diamant est métastable  
Dans les conditions usuelles de  
température et de pression



Pluies verglaçantes à Vladivostok

On va voir par la suite que c'est la tension de surface qui est encore une fois responsable de ces bizarreries thermodynamiques.

### b) Formation d'un noyau liquide dans un gaz

Un gaz à l'équilibre peut être considéré comme homogène. Néanmoins, au cours du temps, il y a toujours des mouvements aléatoires des molécules qui font que certaines zones vont se trouver plus



peuplées que d'autres. Il peut donc se former des zones du gaz où la densité se trouve proche de celle du liquide. A partir de ce noyau liquide qui se forme au sein du gaz, on va chercher à déterminer l'évolution du système, en cherchant la phase stable du système. On considère la transformation suivante : On part à l'instant initial d'un gaz homogène dont on isole une partie sphérique contenant  $n$  moles de gaz. A un instant ultérieur, la sphère est maintenant constituée de  $n$  moles de liquide. Tout au long de la transformation, la sphère est en contact avec le gaz environnant, qui joue le rôle de thermostat de température  $T_0$  et un pressostat de pression  $p_0$ . Pour étudier l'évolution de transformation, on utilise l'enthalpie libre :  $G(T_0, p_0, n) = U - T_0S + p_0V$

La variation de  $G$  entre l'état initial (gazeux) et l'état final (liquide) s'écrit :

$$\Delta G = G_l(T_0, p_l, n) - G_g(T_0, p_0, n) + 4\pi r^2\gamma$$

Le terme de tension superficielle est dû à l'apparition d'une interface au sein du gaz, ce qui est défavorable énergétiquement. La pression  $p_l$  au sein du liquide diffère de  $p_0$  puisqu'elle vaut :

$$p_l = p_0 + \frac{2\gamma}{r}$$

On néglige cette surpression car elle n'importe peu pour des noyaux très petits. En effet, pour que la surpression relative  $\frac{p_l - p_0}{p_0}$  soit supérieure à 1%, il faut  $r < 1,4 \cdot 10^{-4}$  m. On peut alors écrire :

$$\Delta G = G_l(T_0, p_0, n) - G_g(T_0, p_0, n) + 4\pi r^2\gamma = n(\mu_l(T_0, p_0) - \mu_g(T_0, p_0)) + 4\pi r^2\gamma$$

En exprimant  $n$  en fonction du rayon de la sphère :  $n = \frac{4\pi r^3}{3v_l(T_0, p_0)}$

On peut exprimer  $\Delta G$  comme une fonction de la variable interne  $r$  :

$$\Delta G(T_0, p_0, r) = \left( \mu_l(T_0, p_0) - \mu_g(T_0, p_0) \right) * \frac{4\pi r^3}{3v_l(T_0, p_0)} + 4\pi r^2\gamma$$

Deux cas se présentent alors :

- Si  $\mu_l(T_0, p_0) > \mu_g(T_0, p_0)$ , alors l'enthalpie libre est une fonction monotone croissante, il n'existe qu'un seul état d'équilibre stable, correspondant à  $r = 0$  qui est l'état gazeux.
- Si  $\mu_l(T_0, p_0) < \mu_g(T_0, p_0)$ , il existe un état d'équilibre métastable, correspondant au minimum local de l'enthalpie libre en  $r = 0$ , qui est la phase gazeuse, la phase stable étant la phase liquide.

On voit que dans le second cas apparaît une compétition entre un terme de volume et un terme de surface. Le terme de volume est favorable au changement de phase, car le potentiel chimique le plus petit correspond à la phase la plus stable. Ce terme est en  $r^3$ , donc prédominera pour des gouttes de grandes tailles. Au contraire, le terme de surface est défavorable au changement de phase puisque plus  $r$  augmente, plus il faut apporter d'énergie pour créer de l'interface avec le gaz. Il sera prédominant pour les petits rayons. Ainsi, un rayon critique apparaît, marquant deux régimes distincts :

- Une goutte de liquide de rayon  $r < r_c$  s'évapore spontanément et le système retourne à l'état gazeux.
- Une goutte de liquide de rayon  $r > r_c$  va grossir jusqu'à ce que tout le gaz se soit condensé.

Ce rayon critique s'obtient aisément en recherchant les minimas de  $\Delta G$  :  $r_c = \frac{2\gamma v_l}{(\mu_g - \mu_l)}$

### c) Nucléation hétérogène

## Exemple de nucléation hétérogène



Jusqu'ici, on a considéré qu'une goutte de liquide pouvait spontanément se former au sein du gaz. En réalité, cette création est favorisée par la présence de corps étrangers dans le gaz. Cela peut être des poussières, ou bien la paroi dans laquelle le gaz est contenu, etc... La présence de ces germes abaisse la tension de surface et facilite donc le changement d'état. C'est comme cela que les bulles de champagne se forment. En effet, on observe que les bulles de champagne remontent en colonne du bas vers le haut de la flûte ce qui est le signe qu'elles ont été formées sur des sites de nucléations précis. On a longtemps pensé que les sites étaient des impuretés du verre dans lequel le champagne est versé. Effectivement, si on grave un verre, des bulles vont se former au niveau des gravures, par contre les aspérités naturelles du verre sont en réalité trop petites pour servir de sites de nucléation. L'explication retenue aujourd'hui est la présence de fibres de cellulose au sein du verre, qui proviennent directement de l'air ambiant ou du torchon d'essuyage. Une fibre de cellulose possède en son sein une cavité, le lumen, qui permet l'emprisonnement d'une minuscule poche d'air au moment où le champagne est versé dans la flûte. Puisque le champagne est sursaturé en gaz carbonique dont l'unique dessein est de rejoindre une phase gazeuse, les molécules de  $\text{CO}_2$  vont s'engouffrer par diffusion dans la poche de gaz piégée au sein de la fibre. La poche de gaz va donc grossir dans le lumen jusqu'à ce qu'elle atteigne l'un des deux bouts de la fibre. Une fois parvenue à l'une des extrémités de la fibre, une bulle se détache alors.

Ce phénomène a une autre application étonnante en physique des particules. En effet, ce phénomène a été utilisé dans les chambres à brouillard et les chambres à bulles, qui sont des détecteurs de particules subatomiques. La première fut conçue par Wilson en 1910 (prix Nobel 1927). C'est une enceinte constituée de vapeur sursaturée. Quand des particules chargées la traversent, elles ionisent cette vapeur, qui se condense autour des ions pour former des gouttelettes. Les particules laissent dans leur sillage une traînée de gouttelettes, qu'il est possible de photographier. Durant la première moitié du vingtième siècle, l'observation de rayons cosmiques traversant une chambre à brouillard a permis de découvrir plusieurs particules fondamentales comme le positon, le muon et les premières particules étranges. La seconde fut conçue par Donald Glaser en 1952 (prix Nobel 1960) et a un fonctionnement semblable à celui de la chambre à brouillard, si ce n'est que les particules laissent une traînée de bulles dans un liquide surchauffé à la limite de l'ébullition, plutôt que dans de la vapeur.

Gargamelle, une chambre à bulle conçue par le CERN joua dans la découverte des courants neutres faibles en 1973. Cette découverte confirma l'hypothèse de la théorie électrofaible qui prédisait l'existence de ces courants, et considérait la force électromagnétique et l'interaction faible comme deux facettes d'une même interaction.

## V Ondes acoustiques (voir [1], [8], [9])

On a tous une idée assez intuitive de ce que sont les ondes sonores, quand on parle à nos amis ou qu'on écoute de la musique : on a cette image d'une vibration de la membrane d'un haut-parleur ou bien des cordes vocales qui vont mettre en mouvement les molécules de l'air, puis elles vont se pousser de proche en proche et c'est ainsi que l'onde va se propager ! Mais quel rapport avec les ondes sismiques par exemple, qui déforment les roches de la terre sur plusieurs km ? Ou bien l'échographie qui permet de sonder ce qui se passe dans le ventre d'une femme enceinte ? Tous ces phénomènes peuvent être décrits par les ondes acoustiques, domaine très large qui décrit le déplacement d'une perturbation dans les fluides comme dans les solides, avec des OG de fréquences ou d'intensités très larges.

### 1) Équations de l'acoustique

On étudie une particule de fluide dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. On suppose que le fluide est parfait et on néglige les effets de la pesanteur. On considère une évolution adiabatique réversible (isentropique).

On se place dans l'approximation acoustique : l'onde sonore est une faible perturbation, on conduit tous les calculs à l'ordre 1.

$$P(M,t) = P_0 + p_1(M,t), \mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t), \vec{v} = \vec{v}_1(M, t)$$

- On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule de fluide, de masse  $\mu dt$  :

$$\mu dt \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{grad}(p) dt, \text{ avec } \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}, \text{ le deuxième terme est négligeable car d'ordre 2}$$

Après linéarisation à l'ordre 1, on obtient :  $\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}(p)$

- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}) = 0$$

A l'ordre 1 :  $\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{v}) = 0$

- Équation thermodynamique :

L'évolution des particules de fluide mises en mouvement par l'onde sonore est isentropique, le coefficient de compressibilité isentropique s'écrit :  $\chi_S = \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$  (on néglige la dérivée advective).

A l'ordre 1 :  $\mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1$

$$\mu_0 \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mu_0 \operatorname{div}(\vec{v})$$

On dérive l'équation d'Euler :  $\mu_0 \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\Delta p_1$

Avec le théorème de Schwarz, on peut écrire :  $\mu_0 \frac{\partial \operatorname{div}(\vec{v})}{\partial t} = -\Delta p_1$

Ainsi, on obtient l'équation de D'Alembert :  $\Delta p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$  avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$

On prend le modèle du gaz parfait, d'après la loi de Laplace :  $P \mu^{-\gamma} = \text{cste}$

On fait une différentiation logarithmique et on obtient :  $\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\mu}{\mu} = 0$

$$\Leftrightarrow \chi_s = \frac{1}{\gamma P_0}$$

$$\text{Ainsi, } c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

$M = 28,8 \text{ g.mol}^{-1}$ , on prend  $T = 300 \text{ K}$  et  $\gamma = 1,4$  et on obtient :  $c = 350 \text{ m.s}^{-1}$  pour l'air.

Newton pensait que l'évolution des particules était isotherme, dans ce cas on aurait  $c = 294 \text{ m.s}^{-1}$ .

Pour l'eau,  $c = 1500 \text{ m.s}^{-1}$

En fait notre "ressenti" du son ne passe pas uniquement par les conduits auditifs mais aussi à travers nos os, c'est l'ostéophonie. La légende dit que Beethoven, devenu sourd, utilisait une baguette coincée entre ses dents qui touchait également la caisse de son piano pour ressentir les vibrations à travers les os de sa mâchoire puis de son crâne ! Ce phénomène est aussi la raison pour laquelle notre voix nous paraît très différente dans les enregistrements par rapport à ce qu'on entend au quotidien : quand on parle les ondes sonores passent certes à travers notre conduit auditif, comme tous les autres sons qui proviennent de l'extérieur, mais aussi à travers les os de la mâchoire et du crâne.

Pour les solides,  $c = \sqrt{\frac{E}{\mu_0}}$ , pour l'acier  $c = 5300 \text{ m.s}^{-1}$

Après avoir caractérisé la propagation d'une onde sonore et estimé sa célérité, nous allons maintenant nous intéresser à l'énergie qu'elle transporte

## 2) Étude énergétique

### a) Bilan d'énergie

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(p)$$

$$\chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

On multiplie la première équation par  $\vec{v}$  et la deuxième par  $p_1$  puis on les somme. On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s p_1^2 \right) + \operatorname{div}(p_1 \vec{v}_1) = 0$$

On note  $\vec{\Pi} = p_1 \vec{v}_1$  le vecteur densité de flux de puissance, ou vecteur de Poynting acoustique,

$e_c = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2$  la densité volumique d'énergie cinétique et  $e_p = \frac{1}{2} \chi_S p_1^2$  la densité volumique d'énergie potentielle. Finalement, on retrouve l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = 0$$

Pour une onde progressive harmonique :  $p_1 = P_0 e^{-i(\omega t - kx)}$

En remplaçant dans l'équation d'Euler :  $i\omega \mu_0 v_1 = ik p_1$

Ainsi, on définit l'impédance acoustique :  $Z = \frac{p_1}{v_1}$

Calcul :  $e_c = e_p = \frac{e}{2}$

$\Pi = ce$

## b) Intensité acoustique et niveau sonore

L'intensité acoustique se note  $I = \langle \vec{\Pi} \rangle$ , l'intensité acoustique minimale (=seuil de détection) de l'oreille humaine est  $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ . On définit alors le niveau sonore (en dB) par :  $I_{dB} = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$

Revenons sur l'approximation acoustique :

- dérivée advective négligée :

$$\left| \frac{(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}}{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} \right| \ll 1 \Leftrightarrow \frac{v}{c} \ll 1$$

Pour une OPH,  $v_1 = \sqrt{\frac{2I}{\mu_0 c}}$ , si on prend 50 dB,  $v_1 = 2.10^{-5} \text{ m.s}^{-1} \ll c$

- pesanteur négligée :  $|\mu \vec{g}| \ll |\overrightarrow{\text{grad}}(p)| \Leftrightarrow f \gg \frac{g}{c} = 7.10^{-3} \text{ Hz}$

Pour les ondes sonores,  $f$  est entre 20 Hz et 20 kHz

- adiabaticité :

Le temps caractéristique de diffusion est :  $L_{diff} = \sqrt{\frac{D_{th}}{f}}$ , on peut négliger les échanges thermiques si cette longueur est négligeable devant la longueur d'onde, c'est-à-dire si  $f \ll \frac{D_{th}}{c^2} = 10^{13} \text{ Hz}$ , ce qui est le cas

- approximation acoustique et linéarisations à l'ordre 1 :

Pour 50 dB,  $p_1 = 10^{-2} \text{ Pa} \ll P_0$ , et  $\mu_1 \ll \mu_0$

Seuil d'audition : 0-10 dB

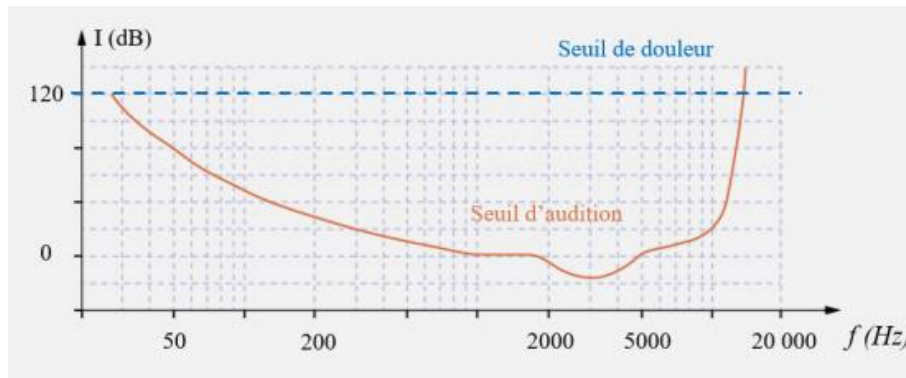
Pièce calme : 20 dB

Conversation normale à 1 m : 60 dB

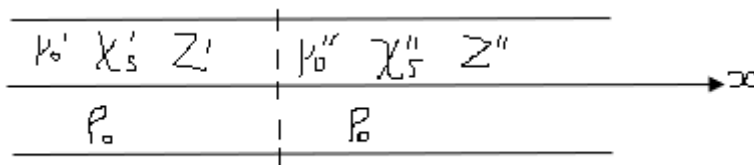
Concert : 100 dB

Seuil de douleur : 120 dB

Diagramme de Bode de l'oreille :



### 3) Réflexion et transmission sans incidence normale



Hypothèses : les fluides ne se mélangent pas (l'interface est imperméable), les vitesses normales sont égales :  $v_1'(0, t) = v_1''(0, t)$  pour tout t.

On applique le PFD à l'interface, de masse nulle :  $0 = (P_0 + p_1')dS - (P_0 + p_1'')dS$

$$\Rightarrow p_1'(0, t) = p_1''(0, t)$$

$$\underline{v_1'} = \underline{a_i}e^{i(\omega t - k'x)} + \underline{a_r}e^{i(\omega t + k'x)} \text{ et } \underline{v_1''} = \underline{a_t}e^{i(\omega t - k''x)}$$

$$\underline{p_1'} = Z'(a_i e^{i(\omega t - k'x)} - a_r e^{i(\omega t + k'x)}) \text{ et } \underline{p_1''} = Z''v_1''$$

On cherche les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude :

$$\text{Conditions aux limites : } \underline{a_i} + \underline{a_r} = \underline{a_t} \text{ et } Z'\underline{a_i} - Z'\underline{a_r} = Z''\underline{a_t}$$

$$r_v = \frac{a_r}{a_i} = \frac{Z' - Z''}{Z' + Z''} \text{ et } t_v = \frac{a_t}{a_i} = \frac{2Z'}{Z' + Z''}$$

$$r_p = -\frac{a_r}{a_i} = \frac{Z'' - Z'}{Z'' + Z'} \text{ et } t_p = \frac{2Z''}{Z'' + Z'}$$

Les coefficients de réflexion et de transmission en puissance sont donnés par :

$$R = \frac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi_i \rangle} \text{ et } T = \frac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi_i \rangle}$$

$$v_i = a_i \cos(\omega t - k'x), v_r = r_p a_i \cos(\omega t + k'x), v_t = t_p a_i \cos(\omega t - k''x)$$

$$p_i = Z' a_i \cos(\omega t - k'x), p_r = Z' r_p a_i \cos(\omega t + k'x), p_t = Z' t_p a_i \cos(\omega t - k''x)$$

$$\langle \Pi_i \rangle = \frac{1}{2} Z' a_i^2, \langle \Pi_r \rangle = \frac{1}{2} Z' r_p r_p a_i^2, \langle \Pi_t \rangle = \frac{1}{2} Z' t_p t_p a_i^2$$

$$\text{Donc } R = \left( \frac{Z' - Z''}{Z' + Z''} \right)^2 \text{ et } T = \frac{4Z'Z''}{(Z' + Z'')^2}$$

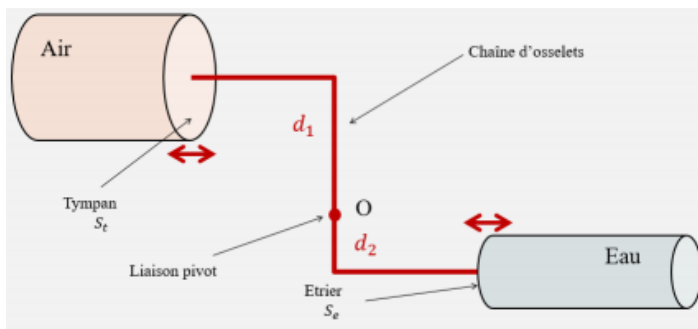
$R + T = 1$  (traduit la conservation de l'énergie)

Ex : oreille

L'onde sonore arrive au niveau du tympan qui, en vibrant, la transmet aux liquides cochléaires, assimilables à de l'eau.

$$Z' \sim 400 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1} \text{ (eau)} \text{ et } Z'' \sim 1,3.10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$$

$T = 1,1.10^{-3} \ll 1$  : la transmission se fait très mal, la chute du niveau sonore est d'environ 30 dB.



➔ Adaptation d'impédance par les osselets

On applique le théorème du moment cinétique :  $F_1 d_1 = F_2 d_2$

$$\text{Donc } p_1 S_t d_1 = p_2 S_e d_2 \rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{S_t d_1}{S_e d_2} = 26$$

$$\text{Donc } \Delta I_{dB} = 10 \log \left( \frac{p_2^2}{p_1^2} \right) = 28 \text{ dB}$$

Ainsi grâce à la présence des osselets on peut entendre dans des conditions raisonnables. De plus il y a l'existence de ce qu'on appelle le réflexe stapédien : si l'intensité sonore entrante est trop grande les osselets se rigidifient et ne transmettent plus la vibration mécanique : on perd à nouveau les 28 dB.

Le modèle de l'approximation acoustique marche vraiment très bien. Toutefois il est insuffisant pour décrire des effets non linéaires mettant en jeu des ondes sonores de très fortes intensité, tels que le phénomène de lévitation acoustique, de plus en plus utilisé dans l'industrie car on peut mettre en mouvement des objets non conducteurs. A l'heure actuelle on n'est capable de déplacer que quelques milligrammes mais c'est encore en travaux et l'idée ce serait de l'utiliser dans les milieux pharmaceutiques.