MÉCANIQUE ANALYTIQUE

Bibliographie

[1] cours persos

[2] épreuve C 2016

[3] https://www.lptmc.jussieu.fr/files/Cours_Meca(6).pdf

[4] BFR, Optique

I Mécanique lagrangienne ([1]) (À COMPLÉTER)

II Principes variationnels (voir [1], [2], [3], [4])

Un principe variationnel est un principe physique s'exprimant sous forme variationnelle, duquel on peut déduire de nombreuses propriétés dans un domaine donné (mécanique, optique géométrique, électromagnétisme…).

1) Introduction aux principes variationnels

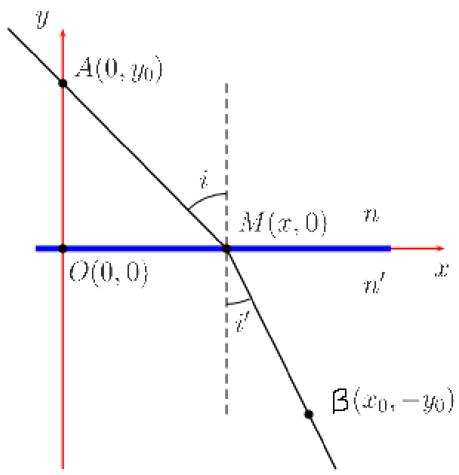
a) Principe de Fermat

La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que le temps de parcours (ou le chemin optique) soit localement extrémal.

Une conséquence première du principe de Fermat est la propagation rectiligne des rayons lumineux dans les milieux homogènes. En effet, dans un milieu homogène, le temps de parcours est proportionnel à la longueur du trajet, et le chemin le plus court dans un espace euclidien pour aller d'un point à un autre est la ligne droite. Il permet notamment de retrouver des résultats de l'optique géométrique, comme les lois de Snell-Descartes.

b) Optique géométrique

On considère 2 points fixes A et B situés dans des milieux transparents homogènes d'indices n et n'.



On cherche à déterminer les coordonnées du point M du dioptre dans le plan xOy par lequel un rayon lumineux issu de A doit passer pour atteindre B.

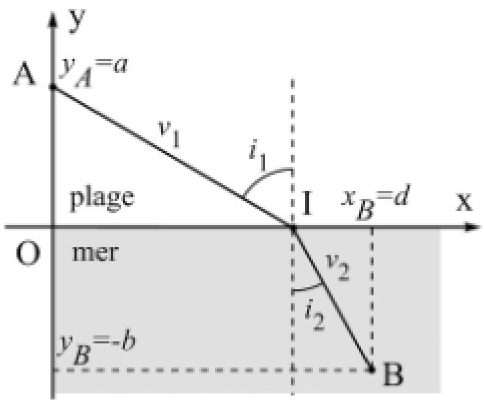
Le chemin optique s'écrit : L = nAM + n'MB, avec $AM = \sqrt{x^2 + {y_0}^2}$ et $MB = \sqrt{(x_0 - x)^2 + {y_0}^2}$

Le chemin réellement suivi par la lumière est celui qui correspond à un chemin optique extrémal, ce qui se traduit par : $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$

On obtient donc : $n\frac{x}{AM} - n'\frac{x_0 - x}{MB} = 0$

On retrouve ainsi la loi de la réfraction de Snell-Descartes : n sin(i) = n' sin(i')

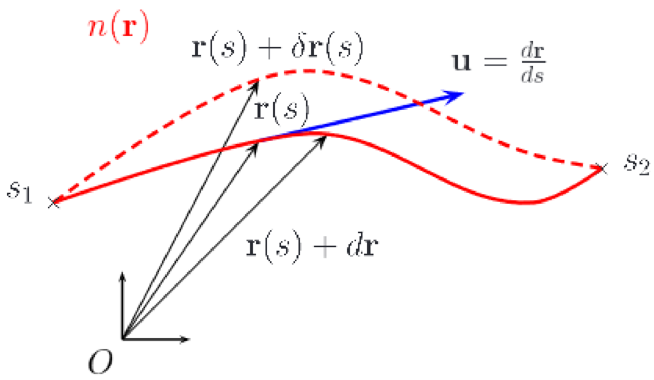
On peut également faire une analogie avec la situation dans laquelle une personne se noie et une autre va la sauver. Avant d'atteindre la personne qui se noie, il faut d'abord traverser la plage en courant, puis la mer en nageant, sachant qu'on est plus rapide en courant qu'en nageant, de même que la lumière se propage moins vite dans l'eau que dans l'air. Le problème est alors d'arriver au point B (où la personne se noie) le plus vite possible. Pour cela, il faut plonger au point I.



Ainsi, on trouve $\frac{1}{v_1}\sin(i_1) = \frac{1}{v_2}\sin(i_2)$

c) Équation des rayons lumineux

On considère un milieu d'indice n(r) quelconque et un rayon lumineux parcourant une courbe C. Un point du rayon sur C, repéré par $\vec{r}$, est paramétré par l'abscisse curviligne s.



Le vecteur tangent unitaire dans le sens du rayon est défini par $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$

Le chemin optique entre deux points fixés d'abscisses s_1 et s_2 s'écrit sur C s'écrit : $L = \int_{s_1}^{s_2} n(r)ds$

Pour établir l'équation des rayons lumineux, on utilise le principe de Fermat en effectuant la variation de chemin $\overrightarrow{r(s)}$ -> $\overrightarrow{r(s)} + \delta\overrightarrow{r(s)}$

La variation du chemin optique s'écrit : $\delta L = \int_{S_1}^{S_2}((\delta n(\vec{r}))\vec{t}.d\vec{r} + n(\vec{r})\delta\vec{t}.d\vec{r} + n(\vec{r})\vec{t}.\delta(d\vec{r})) = 0$ (principe de moindre action)

Or, $\delta n(\vec{r}) = \vec{\nabla}n.\delta\vec{r}$, $|\vec{t}|^2 = 1$

$\delta|\vec{t}|^2 = 2\vec{t}.\delta\vec{t} = 0$ donc le 2e terme de l'intégrale est nul.

On peut montrer par une intégration par parties que le 3e terme vaut : $-\int_{S_1}^{S_2} d\big(n(\vec{r})\vec{t}\big).\delta\vec{r}$

On obtient ainsi l'équation des rayons lumineux : $\frac{d}{ds}\big(n(\vec{r})\vec{t}\big) = \vec{\nabla}n(\vec{r})$

On peut introduire une coordonnée a telle que : ds = n da

Dans ce cas, l'équation précédente devient : $\frac{d^2\vec{r}}{da^2} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}n^2$

On peut faire une analogie mécanique : a : temps, r : position, 1 : masse, $\frac{1}{2}n^2$: énergie potentielle

2) Principes variationnels en mécanique

a) Principe de moindre action

On considère un système dynamique à un degré de liberté q(t) et on postule l'existence d'une fonction L(q, $\dot{q}$, t) permettant de définir l'action :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$$

Principe de moindre action : la dynamique d'une quantité physique peut se déduire à partir de cette action S, en supposant que les valeurs dynamiques permettent à l'action d'avoir une valeur optimale entre deux instants donnés.

Ainsi, on peut obtenir les équations du mouvement en rendant l'action extrémale, c'est-à-dire en imposant la condition : $\delta S = S[q + \varepsilon h] - S[q] = O(\varepsilon^2)$

Autrement, $\frac{dS[q+\varepsilon h]}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} = 0$, h est une fonction qui s'annule en t_1 et en t_2, ε est un réel très petit.

On effectue le développement de Taylor au premier ordre en ϵ,

$$L(q+\epsilon\eta,\dot{q}+\epsilon\dot{\eta},t)=L(q,\dot{q},t)+\epsilon\eta\frac{\partial L}{\partial q}+\epsilon\dot{\eta}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+O(\epsilon^2).$$

Donc, dans l'intégrale d'action

$$S[q]=\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q,\dot{q},t)$$

on intègre par parties

$$S[q+\epsilon\eta]=S[q]+\epsilon\int_{t_1}^{t_2}\Bigg(\eta\frac{\partial L}{\partial q}+\underbrace{\dot{\eta}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Bigg)}_{[\eta\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\eta\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dt} dt+O(\epsilon^2)$$

Dans la variation

$$\delta S\equiv S[q+\varepsilon\eta]-S[q]=O(\varepsilon^2)$$

on annule le terme du premier ordre et il vient

$$\delta S=\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\eta dt=0,$$

soit l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0.$$

b) Exemple : équation de la chaînette

On considère une chaînette de longueur a attachée à ses deux extrémités, soumise uniquement au poids.

La corde prend une position qui tend à minimiser son énergie potentielle, qui s'écrit :

$$E_p=\rho g\int_0^a zds=\rho g\int_0^a z\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}dx$$

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit : $\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=0$, avec L le lagrangien et q une coordonnée.

En assimilant la longueur de la corde au lagrangien, on obtient : $"L"=z\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$

D'après l'équation d'Euler-Lagrange : $\frac{\partial L}{\partial z}=\sqrt{1+z'^2}$, $\frac{\partial L}{\partial z'}=\frac{zz'}{\sqrt{1+z'^2}}$

et $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial z'}\right)=\frac{zz''}{\sqrt{1+z'^2}}+\frac{z'^2}{\sqrt{1+z'^2}}-\frac{zz'^2z''}{\sqrt{1+z'^2}^3}$

Ainsi, $(1+z'^2)^2=zz''+z'^2(1+z'^2)$

Donc $1+2z'^2=zz''+z'^2$

Finalement : $1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=z\frac{d^2z}{dx^2}$

En dérivant, on obtient : $z'z''=zz'''$

Autrement, $\frac{z''}{z'''}=\frac{z}{z'}$

Ainsi, ln(z) = ln(z'') + cste, soit z'' = Kz, z et z'' sont positifs.

On trouve donc $z(x) = a\ ch(\sqrt{K}z)$ car z(0) = a (longueur de la corde)

Pour trouver K, on peut utiliser la relation 1 + z'² = zz'', soit $1 + Ka^2 sh\left(\sqrt{K}x\right) = Ka^2 ch(\sqrt{K}x)$

On a donc Ka² = 1 et $z(x) = a\ ch(\frac{x}{a})$

L'approche de Fermat est évidemment troublante pour un esprit rationnel : comment la lumière sait-elle que tel chemin est le plus court et pas tel autre ? Son principe semble par ailleurs violer le principe de causalité : comment le rayon connaît-il le chemin à prendre à partir de sa destination finale ? Les esprits pieux de l'époque virent dans ce principe très simple l'expression d'une certaine perfection divine qui gouvernait toutes les lois de la physique. Par la suite, Maupertuis généralisa l'approche de Fermat à la mécanique.

On retrouve les principes variationnels dans d'autres domaines tels que l'électromagnétisme ou la mécanique quantique (on peut alors parler de jauge).

3) Électromagnétisme (À COMPLÉTER)

III Mécanique hamiltonienne ([1]) (À COMPLÉTER)