

# ÉLECTROMAGNÉTISME

## Bibliographie

- [1] cours persos
- [2] Physique des solides, Chapitre 1 Théorie de Drude des métaux, Ashcroft et Mermin
- [3] Physique des ondes, Stéphane Olivier
- [4] Garing, Chapitre 3 Ondes et conducteur métallique ; Chapitre 4 Ondes dans un plasma
- [5] <https://youtu.be/9VHFPqCl6wo>
- [6] Physique des diélectriques, Gignoux, chapitres 5, 6 et 7
- [7] Électromagnétisme, Roux, chapitres 10 et 11
- [8] Électromagnétisme, PUF Mauras, chapitre 7
- [9] BFR Électromagnétisme, Tome 4
- [10] Garing, Milieux magnétiques
- [11] Feynman, EM2
- [12] H-prépa, Électromagnétisme

# I Électrostatique ([1]) (À COMPLÉTER)

-théorème de Gauss

-Maxwell-Gauss, Maxwell-Faraday

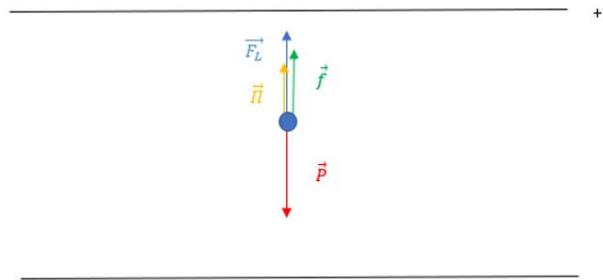
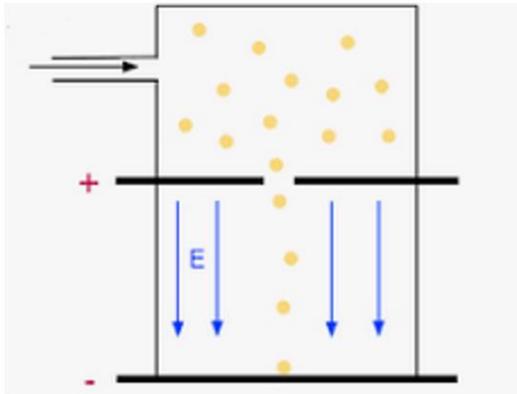
-condensateurs plans

-loi de Coulomb

Expérience de Millikan :

L'expérience de la goutte d'huile, réalisée par Millikan au début du XXe siècle, consiste à pulvériser de minuscules gouttes d'huiles électrisées entre les deux électrodes d'un condensateur plan chargé.

On considère une goutte d'huile, on se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. La goutte est soumise au poids, à la poussée d'Archimède, à la force de Lorentz et à une force de Stokes.



Le PFD s'écrit :  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F}_L + \vec{f}$

Ainsi,  $m \frac{d\vec{v}}{dt} + 6\pi\eta R\vec{v} = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_h - \rho_{air})\vec{g} - qE$

Donc  $\vec{v} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_h - \rho_{air})\vec{g} - qE}{6\pi\eta R} (1 - e^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t})$

La vitesse limite s'écrit :  $v_{lim} = v_0 - \frac{qE}{6\pi\eta R}$ ,  $v_0$  est la vitesse en champ nul.

On peut alors mesurer la charge : on annule la tension aux bornes du condensateur et on mesure  $v_0$ , puis on fait varier le champ électrique de manière à immobiliser la goutte, on peut alors remonter à la charge  $q$ .

Millikan a observé expérimentalement, en irradiant les gouttes par rayons X, que les valeurs d'ionisation étaient toutes des multiples de la charge élémentaire.

## II Magnétostatique ([1]) (À COMPLÉTER)

-théorème d'Ampère

-Maxwell-Ampère, Maxwell-Thomson

-solénoïde

-loi de Biot & Savart

## III Induction électromagnétique ([1])

Découvert par Faraday en 1831, le phénomène d'induction électromagnétique se manifeste en présence de champs variables, il conduit à l'apparition d'une force électromotrice dans un conducteur. Les courants permanents produisent des champs magnétiques, et c'est en cherchant expérimentalement à mettre en évidence, sans succès, une réciprocité stricte que Faraday découvrit l'effet des variations de flux magnétique à travers un circuit. L'induction est à la base de l'électrotechnique (production, transport, distribution...du courant électrique).

### 1) Loi de Faraday

#### a) Mise en évidence expérimentale et loi de Lenz

Expérience : on relie une bobine à un ampèremètre. On approche un aimant vers la bobine et on constate l'apparition d'un courant dans la bobine dans un sens, ce courant est appelé courant induit. On éloigne l'aimant : le sens du courant s'inverse. On constate que l'intensité du courant est d'autant plus grande que la vitesse de l'aimant est grande. De plus, si on inverse les pôles de l'aimant, le courant s'inverse aussi.

Une étude détaillée de toutes les circonstances expérimentales montre que l'apparition d'un courant induit dans un circuit fermé est toujours liée à une variation dans le temps du flux magnétique à travers le circuit.

Le flux du champ magnétique à travers une surface  $S$  est donné par :  $\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$ , il s'exprime en Wb.

Loi de Lenz : le sens du courant induit est tel que le champ magnétique propre qu'il crée tend à s'opposer à la variation du flux qui lui a donné naissance.

#### b) Loi de Faraday

Le courant induit dans le circuit est égal à celui que produirait un générateur fictif, dit générateur induit, dont la force électromotrice (fem)  $e$  est donnée par :  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$  ( $e$  est la force électromotrice induite). Le signe  $-$  traduit la loi de Lenz.

Si on veut étudier un circuit électrique siège d'un phénomène d'induction électromagnétique, il faut ajouter sur le schéma électrique un générateur induit avec une force électromotrice  $e$  dans le sens conventionnel du courant (convention générateur).

## 2) Auto-induction

### a) Inductance propre

On considère un circuit fermé parcouru par un courant  $i$ . Ce circuit crée un champ magnétique  $\vec{B}$  proportionnel à  $i$ , donc un flux magnétique appelé flux propre, également proportionnel à  $i$ . Le coefficient de proportionnalité est l'**inductance propre ou auto-induction du circuit**, notée  $L$  :  $\Phi = Li$ .

$L$  dépend de la forme et des dimensions du circuit, et est toujours positif.

Si le courant varie au cours du temps, il apparaît une fem auto-induite donnée par la loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

La fem auto-induite peut être représentée soit par un générateur de fem en convention générateur, soit par une inductance orientée en convention récepteur.

### b) Cas du solénoïde

On cherche à établir l'expression de l'inductance propre  $L$  d'une bobine de longueur  $l$  modélisée par un solénoïde constitué de  $N$  spires parcourues par un courant  $i$ , de surface  $S$ .

*Schéma bobine parcourue par un courant  $i$ , créant un champ  $\vec{B}$ .*

Le champ magnétique créé par la bobine a pour expression :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 N}{l} i \vec{u}_x$

$\vec{B}$  est uniforme, donc le flux de ce champ à travers une seule spire s'écrit :  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{\mu_0 N i S}{l}$

Le flux propre à travers la bobine est le flux total à travers les  $N$  spires :  $\Phi_p = \frac{\mu_0 N^2 i S}{l}$

Par identification, on a :  $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$

Ordre de grandeur : pour un solénoïde de 1000 spires de rayon  $R = 3\text{cm}$ , réparties sur une longueur  $l = 10\text{cm}$ , on obtient :  $L = 36\text{mH}$ .

### c) Bilan énergétique

On considère un circuit RL alimenté par un générateur de fem  $e_{\text{alim}}$  :

*Schéma électrique*

La loi des mailles d'écrit :  $e_{\text{alim}} = Ri - e = Ri + L\frac{di}{dt}$

On multiplie la loi des mailles par  $i$  :  $e_{\text{alim}}i = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$

$e_{atim}i$  est la puissance fournie par le générateur

$Ri^2$  est la puissance dissipée par effet Joule

$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2)$  est la puissance stockée dans la bobine

On en déduit que l'énergie magnétique d'un circuit d'auto-inductance  $L$ , parcouru par un courant  $i$ , est :  $E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2$

### 3) Inductance mutuelle

#### a) Définition

Quand un circuit  $C_1$  est parcouru par un courant  $i_1$ , il crée un champ magnétique  $\vec{B}_1$  dont la norme est proportionnelle à  $i_1$  qui le parcourt. Un circuit  $C_2$  est placé dans le champ  $\vec{B}_1$  donc il intercepte les lignes de champ. Ainsi  $\vec{B}_1$  a un flux à travers  $C_2$  que l'on note  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  (proportionnel à  $i_1$ ). De même, si  $C_2$  est parcouru par un courant  $i_2$ , il envoie un flux magnétique  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  (proportionnel à  $i_2$ ) à travers  $C_1$ . On admet que le coefficient de proportionnalité entre les flux et les courants est le même, ce coefficient est appelé **inductance mutuelle  $M$**  :  $\Phi_{1 \rightarrow 2} = Mi_1$  et  $\Phi_{2 \rightarrow 1} = Mi_2$ .

On cherche l'inductance mutuelle entre une bobine de longueur  $l_1$  constituée de  $N_1$  spires parcourue par un courant  $i_1$  (et de section  $S_1$ ) et une autre bobine constituée de  $N_2$  spires de surface  $S_2$  placée à l'intérieur de la première, et de même axe.

La bobine extérieure crée un champ :  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l_1} \vec{u}_x$ .

Le flux de ce champ à travers une spire de la bobine intérieure s'écrit :  $\Phi_{1 \rightarrow 2, spire} = \frac{\mu_0 N_1 i_1 S_2}{l_1}$

A travers les  $N_2$  spires, le flux est :  $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 i_1 S_2}{l_1}$

On en déduit :  $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{l_1}$

Le signe de  $M$  est arbitraire, il dépend de l'orientation relative des deux circuits.

#### b) Circuit équivalent et bilan énergétique

On reprend les circuits  $C_1$  et  $C_2$ . Le flux total à travers  $C_1$  s'écrit :  $\Phi_1 = \Phi_{1,p} + \Phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 i_1 + M i_2$

La fem induite dans  $C_1$  est donc :  $e_1(t) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$

De même,  $e_2(t) = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$

On en déduit alors les représentations électriques équivalentes aux deux circuits selon les 2 conventions :

*Schéma en convention générateur, schéma en convention récepteur*

On alimente le circuit  $C_1$ , de résistance  $R_1$  avec un générateur qui impose la tension  $v_1(t) = V_0 \cos(\omega t)$  et on ferme  $C_2$ , de résistance  $R_2$  par un fil.

### Schéma électrique

On écrit la loi des mailles dans chaque circuit :

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

En passant en notation complexe, on peut montrer que  $\underline{v}_1 = \underline{Z} \underline{i}_1$  avec  $\underline{Z} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$

### Schéma électrique équivalent

Le couplage entre les deux circuits est équivalent à un circuit d'impédance  $\underline{Z}$  alimentée par le générateur. Les caractéristiques du circuit  $C_2$  interviennent par le couplage inductif.

On multiplie la loi des mailles de chaque circuit par leur courant respectif :

$$\begin{cases} v_1 i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

On somme les deux équations et on obtient :  $v_1 i_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right) + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$

La puissance délivrée par le générateur se répartit en :

- une puissance dissipée par effet Joule dans les résistances
- une puissance magnétique qui dérive de l'énergie magnétique dans les deux circuits et du couplage entre ces circuits

L'énergie magnétique de deux circuits couplés par mutuelle induction vaut :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

## IV Ondes électromagnétiques dans le vide (voir [1])

-équations de Maxwell

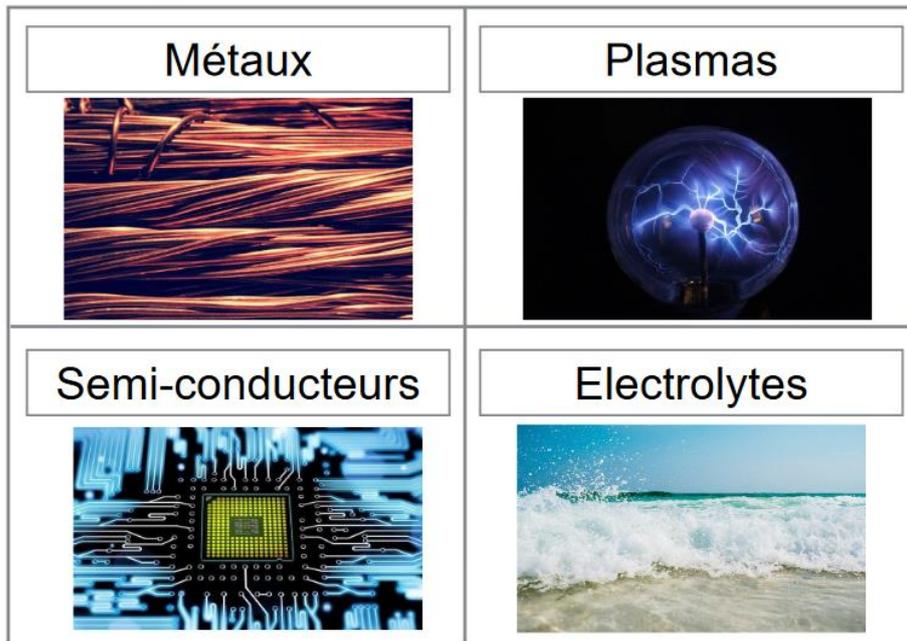
-équation de D'Alembert

## V Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs (voir [1], [2], [3], [4])

On sait que dans le vide, le comportement d'une onde électromagnétique est régi par l'équation de D'Alembert. Cette équation a été établie en considérant un milieu vide de charge et de courants. Or,

les équations de Maxwell dont on connaît la forme dans le cas général font apparaître un terme de charge et un terme de courant. Comment évolue la propagation de l'onde électromagnétique lorsque l'on prend en compte ces quantités ? Les équations de Maxwell ne se suffisent pas à elles-mêmes si l'on tient compte de ces quantités (plus d'inconnues que d'équations). Il est donc nécessaire d'étudier un milieu donné et d'établir dans ce milieu une équation constitutive qui régira la propagation de l'onde. Quelle équation permet alors de décrire la propagation dans un milieu conducteur, sachant qu'il s'agit d'un milieu possédant des porteurs de charges libres de se déplacer ?

Conducteur : milieu dans lequel se trouvent des charges libres de déplacer



Nous verrons en particulier la propagation des ondes électromagnétiques dans les métaux et les plasmas. L'objectif est de trouver la réponse fréquentielle d'un conducteur selon la pulsation  $\omega$  de l'onde électromagnétique.

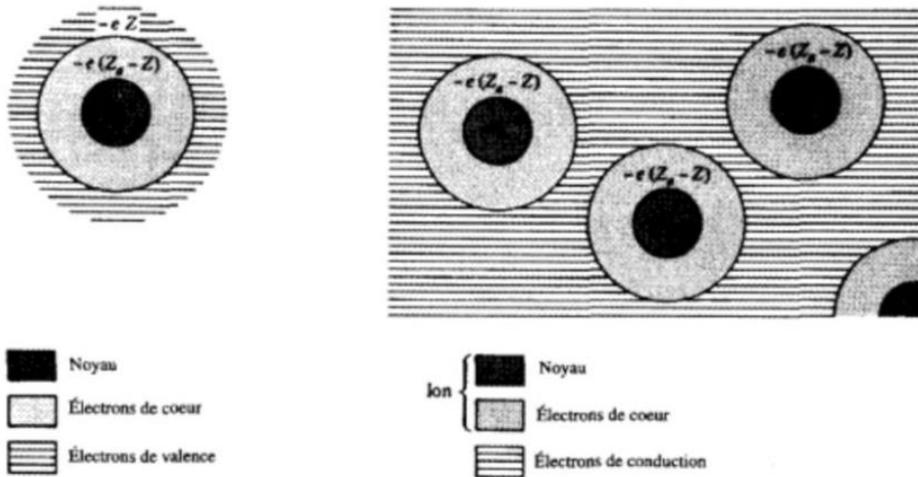
## 1) Ondes électromagnétiques dans un métal

### a) Modèle de Drude

Trois ans après la découverte de l'électron par Thompson, Paul Drude construit sa théorie de la conduction électrique par application de la théorie cinétique des gaz à un métal.

Lorsque les atomes d'un élément métallique se rassemblent pour former un métal, les électrons de valence se détachent et se déplacent librement dans ce dernier pendant que les ions métalliques (constitués du cœur cationique correspondant au noyau et des électrons de cœur) restent intacts. Un métal peut donc être modélisé par un réseau fixe d'ions immobiles et lourds baignant dans un gaz d'électrons de conduction libres de se déplacer ( $M_{\text{ions}} \gg m_{e^-}$ ).

# Modèle de Drude



La densité d'électrons vaut :  $n \sim \frac{\rho N_a}{M}$

| Élément   | Z | n ( $10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ) |
|-----------|---|---------------------------------|
| Li (78 K) | 1 | 4,70                            |
| Na (5 K)  | 1 | 2,65                            |
| K (5 K)   | 1 | 1,40                            |
| Rb (5 K)  | 1 | 1,15                            |
| Cs (5 K)  | 1 | 0,91                            |
| Cu        | 1 | 8,47                            |
| Ag        | 1 | 5,86                            |
| Au        | 1 | 5,90                            |

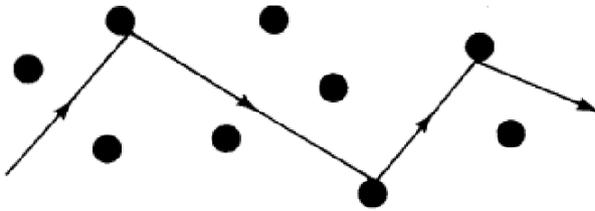
Le modèle de Drude s'appuie sur quelques hypothèses (critiquables mais qui permettent de se faire une idée simple et d'obtenir des estimations valides de certaines propriétés) :

- Électrons indépendants : on néglige les interactions électron-électron et électron-ion
- Les seules interactions sont les collisions avec les ions, les collisions sont des événements instantanés qui changent de manière abrupte la vitesse des électrons
- La probabilité d'effectuer une collision pendant  $dt$  est :  $P(t) = \frac{dt}{\tau}$ , avec  $\tau$  le temps de libre parcours moyen, temps de collision ou temps de relaxation du système
- Équilibre thermodynamique local établi par les collision

Temps de relaxation ( $10^{-14}$  s) :

| Élément | 77 K | 273 K | 373 K |
|---------|------|-------|-------|
| Li      | 7,3  | 0,88  | 0,61  |
| Na      | 17   | 3,2   |       |
| K       | 18   | 4,1   |       |
| Rb      | 14   | 2,8   |       |
| Cs      | 8,6  | 2,1   |       |
| Cu      | 21   | 2,7   | 1,9   |
| Ag      | 20   | 4,0   | 2,8   |
| Au      | 12   | 3,0   | 2,1   |

Trajectoire des électrons selon Drude :



Les collisions ralentissent alors le mouvement de l'électron, ceci se traduit par une force de type frottement fluide exercée sur un volume mésoscopique d'électron :  $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$

Remarque : Les électrons ont des vitesses qui s'annulent souvent  $\langle \vec{v} \rangle = 0$  lors de collisions quand aucun champ électrique n'est appliqué. Le retour à la situation d'équilibre se fait avec un temps  $\tau$ . L'effet des collisions individuelles des électrons est d'introduire un terme d'amortissement dans l'équation du mouvement de la quantité de mouvement par électron. Le  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  (**voir plus bas**) a la bonne forme même si il n'est pas justifié quantitativement dans le modèle de Drude.

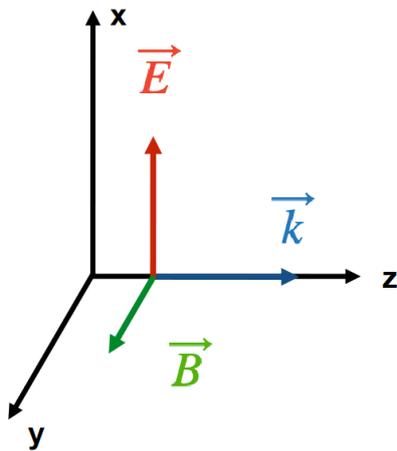
Les collisions dans le modèle de Drude, comme dans la théorie cinétique, sont des événements instantanés qui changent de manière abrupte la vitesse d'un électron. Drude les attribua aux rebonds des électrons sur les cœurs impénétrables des ions, et non aux collisions électron-électron qui constituent le mécanisme prépondérant des collisions dans un gaz ordinaire. La diffusion électron-électron est en effet l'un des mécanismes de collision les moins importants dans un métal, sauf sous certaines conditions particulières. Cependant, le mécanisme simple schématisé d'un électron rebondissant d'ion en ion est loin de décrire la réalité. Heureusement, c'est sans importance : on peut comprendre de manière qualitative (et souvent quantitative) la conduction métallique en supposant simplement l'existence d'un certain mécanisme de diffusion, sans vraiment en préciser la nature. En faisant uniquement appel, dans notre analyse, à certaines généralités sur les processus de collision, nous évitons de nous compromettre en adoptant un point de vue particulier concernant la façon dont la diffusion des électrons se produit.

## b) Relation de structure

On écrit le principe fondamental de la dynamique sur un volume mésoscopique d'électrons du gaz d'électrons de conduction dans un référentiel galiléen :  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{m}{\tau} \vec{v}$

Dans le cas non relativiste, le terme magnétique de la force de Lorentz est négligeable devant le terme électrique.

On choisit une forme d'ondes transverses en  $e^{i(\omega t - kz)}$  :



En régime sinusoïdal forcé :  $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i\omega t}$

Ainsi,  $i\omega m \vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$

Donc,  $\vec{v} = \frac{-e\tau}{m(1+i\tau\omega)} \vec{E}$

Comme mes ions sont supposés fixes,  $\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_{ions} \approx \vec{j}_e = -ne\vec{v}$

On en déduit la loi d'Ohm locale :  $\vec{j} = \sigma(\omega)\vec{E}$ , avec  $\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1+i\tau\omega}$

À basse fréquence on retrouve les propriétés de conduction similaire à  $\omega = 0$  (cas statique) avec une certaine conductivité  $\sigma_0$ , c'est-à-dire la loi d'Ohm locale en statique. À haute fréquence, les électrons n'arrivent pas à suivre l'excitation, cohérent avec  $\sigma = 0$ .

On note  $\rho_0 = \frac{1}{\sigma_0}$  la résistivité. Quelques résistivités (en  $\mu\Omega \cdot \text{cm}^{-1}$ ) :

| Élément | 77 K | 273 K | 373 K | $\frac{(\rho/T)_{373 \text{ K}}}{(\rho/T)_{273 \text{ K}}}$ |
|---------|------|-------|-------|---|
| Li      | 1,04 | 8,55  | 12,4  | 1,06  |
| Na      | 0,8  | 4,2   | Fondu |   |
| K       | 1,38 | 6,1   | Fondu |   |
| Rb      | 2,2  | 11,0  | Fondu |   |
| Cs      | 4,5  | 18,8  | Fondu |   |
| Cu      | 0,2  | 1,56  | 2,24  | 1,05  |
| Ag      | 0,3  | 1,51  | 2,13  | 1,03  |
| Au      | 0,5  | 2,04  | 2,84  | 1,02  |

### c) Équation de propagation et relation de dispersion

On repart du PFD :  $m \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \right) \vec{v} = -e\vec{E}$ , on multiplie par  $ne$  :  $\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \right) \vec{j} = ne^2\vec{E}$

On applique le rotationnel :  $\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \right) \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{j}) = ne^2\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})$

## Equations de Maxwell

$$\left. \begin{aligned} \text{div}(\vec{E}) &= 0 \\ \text{div}(\vec{B}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{onde transverse}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

D'après Maxwell-Ampère,  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{j}) = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})}{\partial t}$

Puis avec Maxwell-Faraday, on trouve :  $\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \right) (\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}) = \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , avec  $\omega_p$  la pulsation plasma  
**(voir plus bas)**,  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$

Remarque : dans un milieu ohmique en régime lentement variable,  $\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , on reconnaît une équation de diffusion

La relation de dispersion s'écrit :  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{i\tau\omega}{1+i\tau\omega}$

À basse fréquence,  $\tau\omega \ll 1$  :  $k^2 \approx -\frac{i\tau\omega\omega_p^2}{c^2}$ , donc  $k = \pm \frac{1-i}{\delta}$ , avec  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}}$  l'épaisseur de peau

On choisit le « + » pour  $k$ , car on veut une onde se propageant selon les  $z$  croissants.

On a ainsi :  $\vec{E} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{e}_x$

Pour le cuivre, avec  $\sigma_0 = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$  à  $\omega = 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\delta = 0,16 \text{ mm}$

Aspect énergétique :  $\langle P \rangle = \sigma_0 \langle |\vec{E}|^2 \rangle = \sigma_0 \frac{E_0^2}{2}$ , le conducteur ohmique reçoit de l'énergie du champ, qu'il dissipe par effet Joule

À haute fréquence,  $\tau\omega \gg 1$

La relation de dispersion devient :  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

On cherche  $k = k' + ik''$

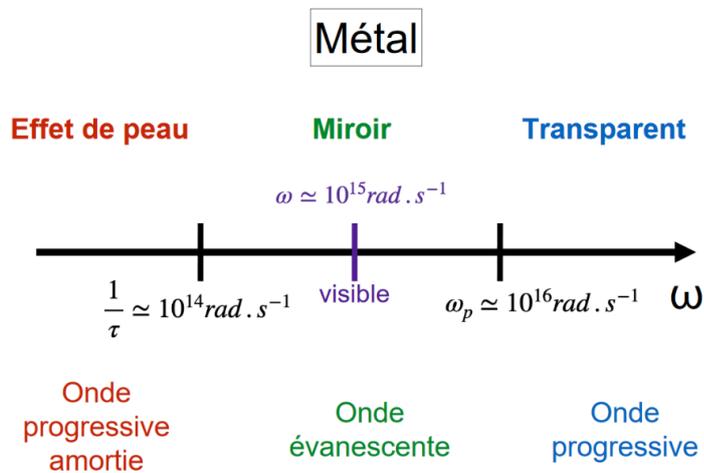
Pour  $\omega < \omega_p$ ,  $k^2 < 0$  donc  $k$  est imaginaire pur :  $k = \pm i \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$

Dans ce cas,  $\vec{E} = E_0 e^{-k''z} e^{i\omega t} \vec{e}_x$ , on a affaire à une onde évanescente : atténuation mais pas de propagation (**voir plus bas**).

Pour  $\omega > \omega_p$ ,  $k$  est réel :  $k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$  (on choisit la solution « + » pour avoir propagation selon les  $z$  croissants)

Pour  $\omega \gg \omega_p$ , la propagation est identique au vide (on a  $k \approx \frac{\omega}{c}$ )

Aspect énergétique :  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  sont en quadrature de phase donc  $\langle P \rangle = 0$ , on parle de milieu miroir réfléchissant.



Métal = filtre passe-bas avec la lumière

#### d) Limites du modèle

Pour le décompte des électrons, on doit prendre 1 par atome de cuivre par exemple. Or comme on l'a dit, les atomes sont ionisés. La configuration électronique du cuivre est  $[\text{Cu}] = [\text{Ar}]3d^{10}4s^1$  et on peut former des ions  $\text{Cu}^{2+}$ , alors pourquoi compter 1 et pas 2 ? On est en train de parler de configuration électronique, mais peut-être que le problème est quantique...

À  $T = 300 \text{ K}$ , on peut calculer  $n\lambda_{\text{DB}}^3 \gg 1$  ( $\lambda_{\text{DB}}$  est la longueur d'onde de De Broglie). Le comportement des électrons doit donc être décrit par la mécanique quantique, il faut trouver un autre modèle. Nous verrons cela plus bas. Avant cela, on va s'intéresser au plasma.

## 2) Ondes électromagnétiques dans un plasma dilué

De la même manière que pour les conducteurs, on cherche d'abord à décrire les plasmas pour obtenir la relation constitutive et enfin l'équation d'onde et la relation de dispersion. On procèdera par analogie.

## a) Modèle microscopique

Plasma : milieu partiellement ionisé contenant notamment des ions (M, +e), des électrons (m, -e). Il peut s'agir par exemple, d'un gaz à haute température soumis à un rayonnement ionisant (4ème état de la matière). Comme pour le métal,  $M \gg m$ . Par ailleurs on suppose que la plasma est globalement neutre ( $n_i = n_e$ ), et puisque le milieu est dilué, on considère qu'il n'y a pas ou peu d'interactions entre les particules, donc  $\tau \rightarrow \infty$  et  $\vec{f} \rightarrow \vec{0}$

Remarque : la pulsation plasma pour les métaux est différente de celle des plasmas.

Un plasma est dit froid lorsque celui-ci est généré par une source lumineuse qui ionise les atomes du milieu. L'exemple type d'un plasma froid est l'ionosphère (qui est la dernière couche d'atmosphère ionisée d'une planète), comme son nom l'indique les atomes dans ce milieu sont ionisés par le rayonnement solaire. Un plasma est appelé chaud lorsque celui-ci est généré par une source de chaleur si intense qu'elle va séparer les électrons de leur noyau. Cet état de la matière particulier se retrouve dans le Soleil.

## b) Relations caractéristiques du plasma

La conductivité est  $\sigma = -\frac{i\sigma_0}{\tau\omega}$

L'équation d'onde est la suivante :  $\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2}\vec{B}$  (équation de Klein-Gordon)

On peut la retrouver en faisant tendre  $\tau$  vers l'infini pour le métal.

La relation de dispersion s'écrit donc :  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

On retrouve bien la même chose que pour le métal pour  $\tau\omega \gg 1$

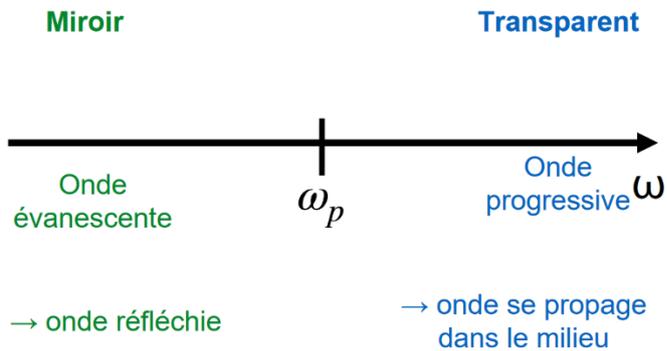
On a bien sûr  $\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ine^2\omega}{m}\vec{E}$  et  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$

### Plasma

| Type de plasma                            | densité particulaire n |
|---|------------------------|
| ionosphère<br>(couche F, altitude 250 km) | $10^{12}m^{-3}$        |
| Foudre                                    | $10^{21}m^{-3}$        |
| Etoiles                                   | $10^{33}m^{-3}$        |

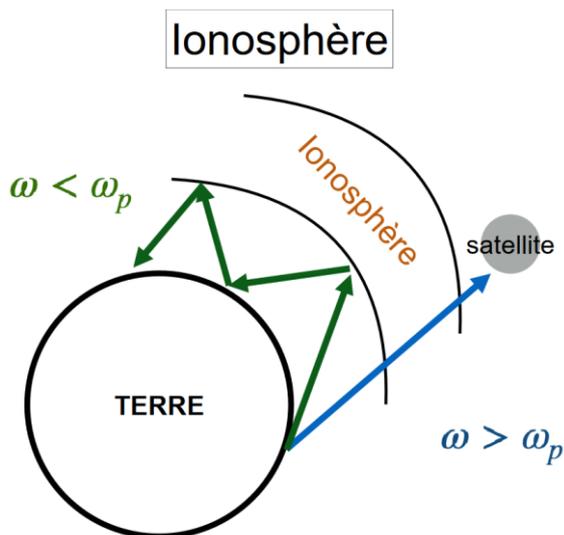
Densité de particules de quelques plasmas typiques

## Plasma



### c) Application : le GPS

L'atmosphère contribue à l'erreur de position donnée par un GPS en perturbant son signal. On se concentre ici sur l'ionosphère. La densité électronique de l'ionosphère est très variable, notamment entre le jour et la nuit. On prendra pour les calculs  $n = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ .



On évalue la fréquence plasma de l'ionosphère à  $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \approx 9 \text{ MHz}$

Si  $f > f_p$ , ce qui est le cas pour le GPS ( $f$  de l'ordre du GHz), l'information est bien transmise

Si  $f < f_p$  (par exemple pour les grandes ondes de communication,  $f = 100 \text{ kHz}$ ), le signal ne traverse pas l'ionosphère, il est réfléchi -> utile pour des radios qui voudraient augmenter le nombre d'auditeurs en atteignant des zones plus lointaines. En effet, l'utilisation de ces fréquences permettent les réflexions sur l'ionosphère.

Le temps de parcours s'écrit :  $t = \frac{l-l_i}{c} + \frac{l_i}{v_g}$ , avec  $v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$  la vitesse de groupe

Le décalage induit par l'ionosphère est donc :  $\Delta l = l_i(n - 1) = 5 \text{ m}$  environ ( $n$  très proche de 1)

En raison de ses mouvements internes et des différences de température que l'on y rencontre, l'atmosphère dégrade considérablement la qualité des images d'un télescope.

Mais, s'il apparaît que l'atmosphère amène des contraintes, elle joue également un rôle important dans la protection de la Vie, et pas seulement en filtrant les rayons solaires.

### 3) Théorie des bandes (À COMPLÉTER)

On va étudier un autre modèle, quantique cette fois, et préciser ses conséquences. On travaille à 0 K.

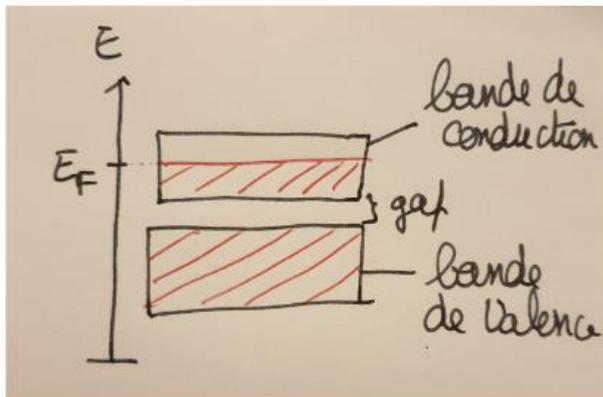
Voir [5]

En fait, cela revient à étudier l'association de  $N = 10^{23}$  orbitales atomiques, qui deviennent tellement resserrées qu'elles forment des bandes d'énergie, séparées par des « gaps ». On va maintenant chercher à remplir ces niveaux.

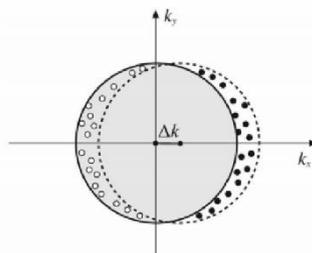
Afin de placer les électrons sur les niveaux d'énergie, on fait comme avec des édifices moléculaires : on applique le principe de Pauli en remplissant les niveaux d'énergie croissante (règle de Klechkowski). On définit deux grandeurs :

- L'énergie de Fermi : énergie du plus haut état quantique occupé dans un système par des fermions à  $T = 0$  K. On pose  $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$
- $k_F$  est le vecteur d'onde de Fermi, vecteur d'onde du dernier électron défini comme s'il évoluait en espace libre

Ainsi, la dernière bande complètement remplie s'appelle bande de valence, et celle au-dessus bande de conduction.



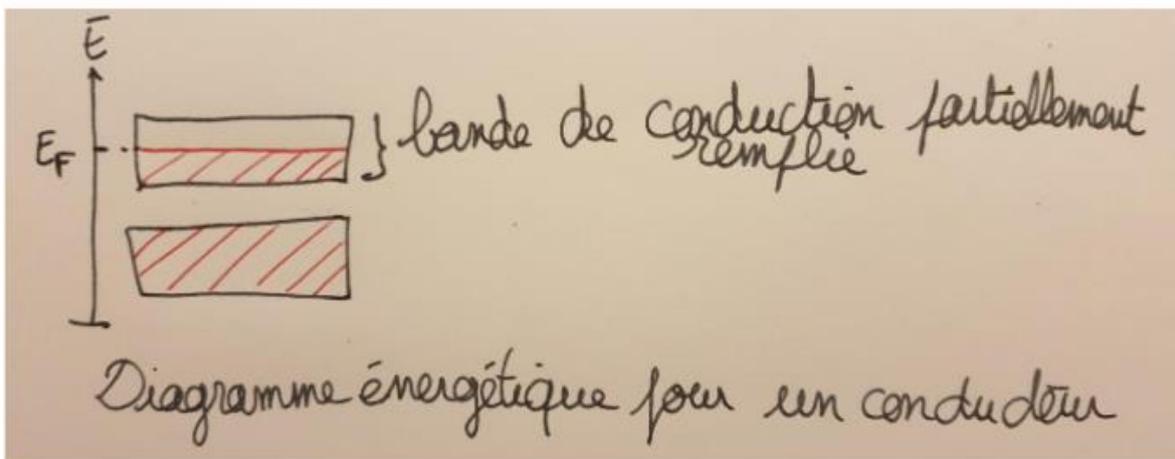
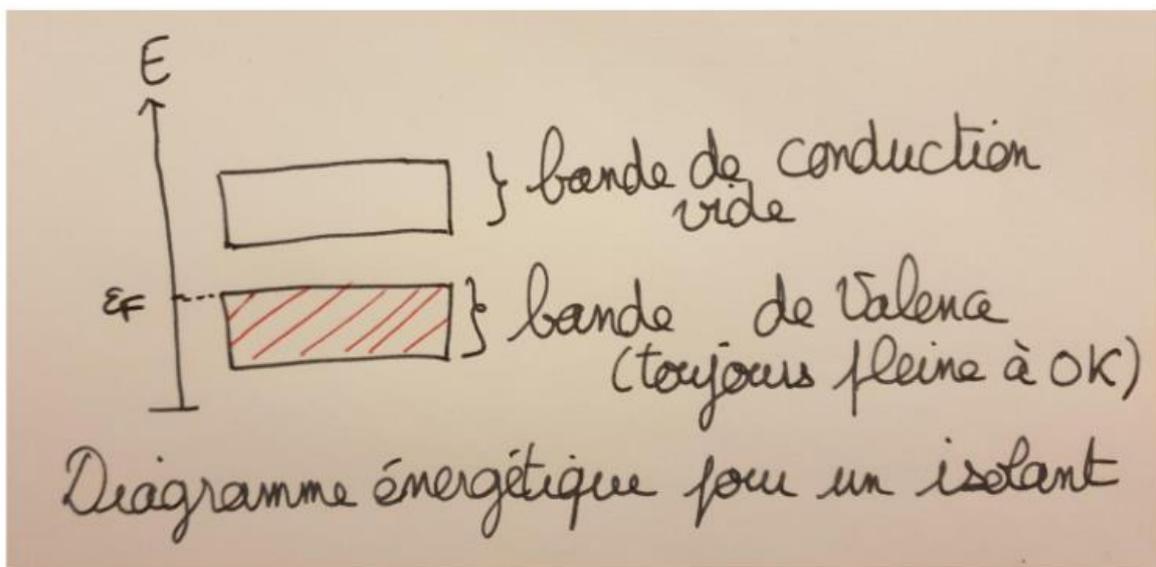
Conduction : déplacement de la sphère de Fermi



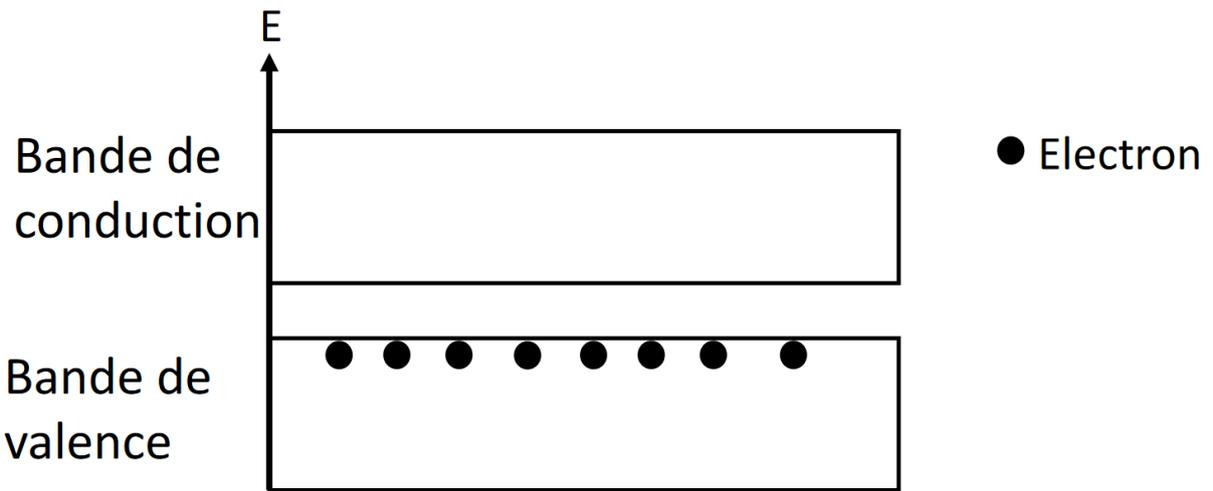
À partir de ces définitions et cette méthode de remplissage, on distingue 4 types de solides :

- Les métaux, dont la bande de conduction est partiellement remplie
- Les isolants, dont la bande de conduction est vide
- Les semimétaux, dont les états d'énergie inférieurs de la bande de conduction recouvrent très faiblement les états d'énergie supérieurs de la bande de valence
- Les semi-conducteurs, dont les caractéristiques électriques sont les mêmes qu'un isolant, mais avec une probabilité qu'un électron puisse contribuer à un courant électrique, quoique faible, suffisamment importante

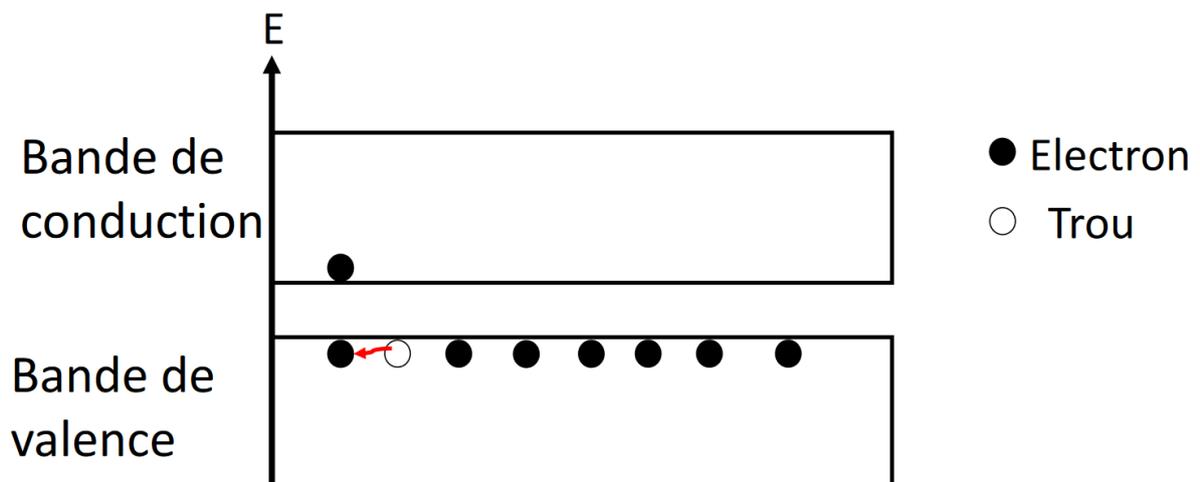
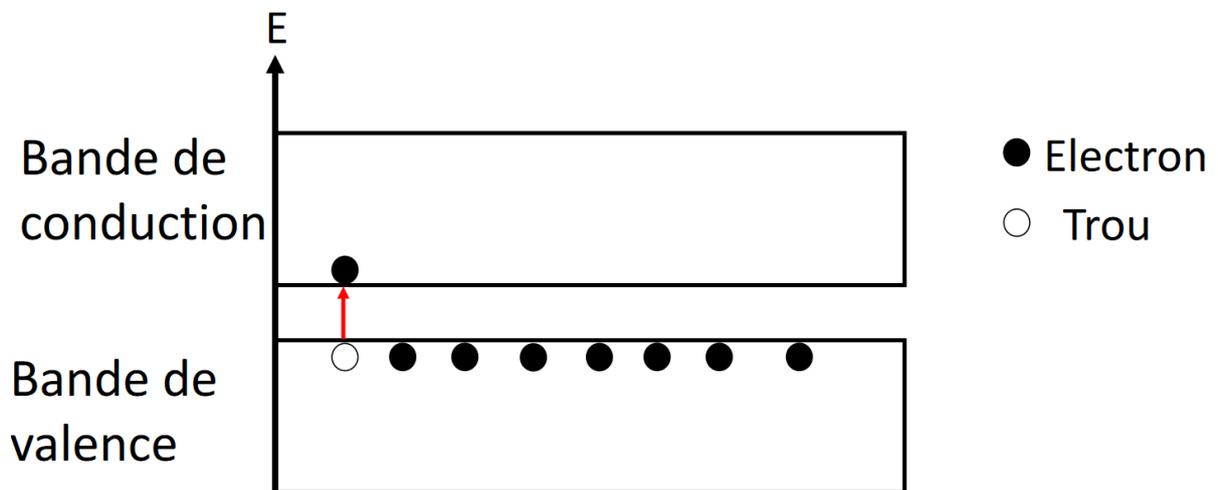
On comprend alors mieux la conduction : l'énergie du gap étant de quelques eV, il est très difficile de faire passer des électrons aux niveaux supérieurs pour les isolants, tandis que pour un conducteur, un électron de la bande de conduction sera facilement excitable dans les niveaux proches.

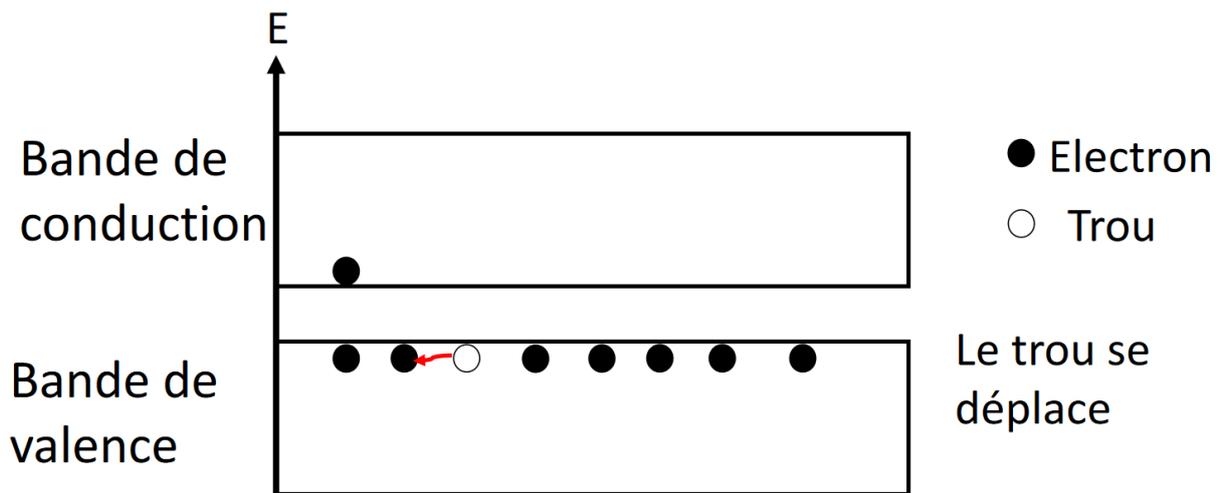


Notion de trou :



À température non nulle :





Dans la théorie du liquide de Fermi, l'effet premier des interactions est de modifier la masse, qui devient une masse effective plus grande que la masse « usuelle ».

Pour comprendre la masse effective, il faut de nouveau utiliser la relation de dispersion de l'énergie et faire un DL autour de son extrémum, qui est l'extrémité de la bande.

$$E(k) = E_F + \frac{1}{2}(k - k_0) \frac{d^2 E}{dk^2}(k_0), \text{ on peut définir la masse effective par : } \frac{\hbar^2}{2m^*} = \frac{d^2 E}{dk^2}(k_0)$$

On peut alors se retrouver avec une masse négative : on a des trous !

| Semi-conducteur | Gap (eV à 300 K) | $\mu_e$ (cm <sup>2</sup> /V/s) | $\mu_h$ (cm <sup>2</sup> /V/s) |
|-----------------|------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| Si              | 1,12             | 1 500                          | 450                            |
| Ge              | 0,66             | 3 900                          | 1 900                          |
| SiC (IV-IV)     | 3                | 400                            | 50                             |
| AsGa            | 1,42             | 8 500                          | 400                            |
| GaP (II-V)      | 2,26             | 110                            | 75                             |
| AsIn (III-V)    | 0,36             | 33 000                         | 460                            |
| CdTe (II-VI)    | 1,56             | 1 050                          | 100                            |
| PbTe (IV-VI)    | 0,31             | 6 000                          | 4 000                          |

## VI Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques (voir [1], [6], [7], [8], [9])

Les milieux diélectriques sont souvent associés aux propriétés isolantes de la matière (à titre d'indication,  $\sigma_{\text{cuivre}} \sim 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ , alors que  $\sigma_{\text{verre}} \sim 10^{-17} \text{ S.m}^{-1}$ ). Ils présentent de fait des propriétés optiques différentes de celle des conducteurs, que nous allons mettre en évidence à l'aide de

l'expérience suivante : on éclaire un prisme à vision directe ou un prisme simple en lumière blanche, et on observe le spectre de la lumière blanche, mettant ainsi en évidence le phénomène de dispersion. On place ensuite une cuve remplie d'une solution de permanganate de potassium (à  $4.10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ ) avant le prisme, et on observe qu'une partie du spectre disparaît à l'écran : c'est le phénomène d'absorption.

Remarque : on peut remplir la cuve à moitié afin d'observer les deux spectres en même temps.

## 1) Propagation dans un milieu diélectrique

### a) Position du problème

La réponse d'un milieu diélectrique à une sollicitation  $\vec{E}$  est la polarisation  $\vec{P}$ , qui correspond à une densité volumique de dipôles électriques :  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$

Hypothèses sur le milieu :

- linéaire : relation linéaire entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$
- homogène : réponse identique en tout point du milieu
- isotrope : réponse identique dans toutes les directions de l'espace

On en déduit une relation de la forme :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

où  $\chi_e$  est la susceptibilité diélectrique du matériau, qui en caractérise donc la réponse. On peut ainsi réécrire le vecteur induction électrique :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

où on fait apparaître la permittivité diélectrique relative du matériau :

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e$$

$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$  est la relation constitutive du matériau.

### b) Relation de dispersion

Dans le cas où  $\rho_{libre} = 0$  et  $\vec{j}_{libre} = \vec{0}$ , les équations de Maxwell prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{D}) = 0 \\ \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

En injectant la relation constitutive  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ , on obtient :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{E}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

On remarque que ces équations sont tout à fait analogues à celles obtenues dans le vide, à  $\epsilon_r$  près. On en déduit l'équation de propagation pour le champ  $\vec{E}$  :

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_r \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Pour une solution harmonique, (qu'on considèrera, sans perte de généralités, se propageant dans le sens des z croissants) de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i[kz - \omega t]}$$

On obtient alors la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2(\omega) = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Cette relation est donc similaire à celle obtenue pour le vide, à  $\epsilon_r$  près.

La permittivité relative caractérise la réponse du milieu à une excitation et donc ses propriétés optiques. On peut d'ailleurs la relier à l'indice optique du milieu par la relation :  $n^2 = \epsilon_r$

Bien que les équations de Maxwell ne permettent pas de déterminer la forme de  $\epsilon_r$ , on peut déjà s'attendre à ce que :

- $\epsilon_r$  dépende de la pulsation excitatrice  $\omega$  : comme pour de nombreuses autres situations physiques (électrocinétique, mécanique), on s'attend à ce que la réponse du milieu diffère en fonction de la fréquence de la sollicitation.
- $\epsilon_r$  soit complexe, ce qui caractériserait le retard de phase que le système prendrait par rapport à l'excitation.

On s'attend donc à un indice optique complexe de la forme :

$$\underline{n}(\omega) = n'(\omega) + in''(\omega)$$

Et donc, d'après la relation de dispersion :

$$\boxed{k(\omega) = \frac{\omega}{c} (n'(\omega) + in''(\omega))}$$

L'onde se propageant dans le milieu prend donc la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \underbrace{e^{-\frac{\omega}{c} n''(\omega) z}}_{\text{absorption}} \underbrace{e^{i[\frac{\omega}{c} n'(\omega) z - \omega t]}}_{\text{dispersion}}$$

On va maintenant s'intéresser à la forme de  $\epsilon_r$ .

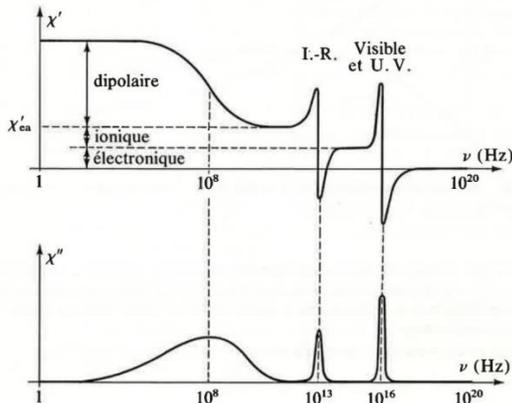
## 2) Modélisation microscopique du milieu

### a) Origines de la polarisation (**À COMPLÉTER**)

La polarisation peut avoir différentes origines :

- Polarisation ionique
- Polarisation d'orientation
- Polarisation électronique

### Différents types de polarisation



Dans la suite, on ne s'intéresse qu'à la polarisation électronique

### b) Modèle de l'électron élastiquement lié

On considère un nuage électronique et on se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

Les forces subies par ce nuage sont les suivantes :

- Le noyau exerce une force de rappel électrostatique de la forme :  $\vec{f}_{el} = -\frac{Ze^2}{3\epsilon_0 V} \vec{l}(t)$
- Pour tenir compte des phénomènes dissipatifs (rayonnement d'énergie par les charges accélérées), on introduit une force de frottement fluide :  $\vec{f}_f = -\frac{Zm_e}{\tau} \frac{d\vec{l}(t)}{dt}$  où  $\tau$  correspond à un temps caractéristique de retour à la position d'équilibre.
- On considère de plus un champ électrique extérieur :  $\vec{f}_e = -Ze\vec{E}(t)$

On fait intervenir le dipôle électrique  $\vec{p}(t) = -Ze \times \vec{l}(t)$ . Par application du PFD au nuage électronique, en notant  $\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{3\epsilon_0 V m_e}$  et  $Q = \omega_0 \tau$  :

$$\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{p}}{dt} + \omega_0^2 \vec{p} = \frac{Ze^2}{m_e} \vec{E}(t)$$

On retrouve l'équation d'un oscillateur amorti forcé. En régime harmonique, en se plaçant dans l'approximation quasi-statique (ie.  $\lambda \gg$  taille caractéristique atome  $\sim \text{\AA}$ , bien vérifié pour des fréquences optiques - id. ARQS en électrocinétique), on peut considérer que  $\vec{E}_\omega = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$  et de même  $\vec{p}_\omega = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$ , et on obtient alors, en posant  $\alpha_0 = 3V$  :

$$\vec{p}_\omega = \epsilon_0 \times \frac{\alpha_0}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} \times \vec{E}_\omega$$

Remarques :

- Pour la force de rappel électrostatique : comme on est proche d'une position d'équilibre, on peut approximer le potentiel d'interaction nuage-noyau par un potentiel harmonique, d'où une force type rappel d'un ressort.
- Pour la force de frottements fluides : on peut relier  $\tau$  à la durée de vie de l'état excité, et le facteur de qualité  $Q$  à la largeur spectrale de la transition énergétique :  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ . Le lien entre  $\Delta\omega$  et  $\tau$  est donné par la relation d'Heisenberg.

On a introduit un modèle microscopique simple, qui nous a permis de nous ramener au cas bien connu de l'oscillateur harmonique amorti forcé. On va pouvoir désormais revenir à l'expression de l'indice optique à partir des résultats obtenus avec ce modèle.

### 3) Propriétés optiques

#### a) Indice optique

En revenant à la définition de la polarisation comme une densité de dipôles, on a :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = N \vec{p}$$

Où  $N$  est la densité volumique de dipôles électroniques (ie. la densité volumique d'atomes). Et on déduit ainsi que :

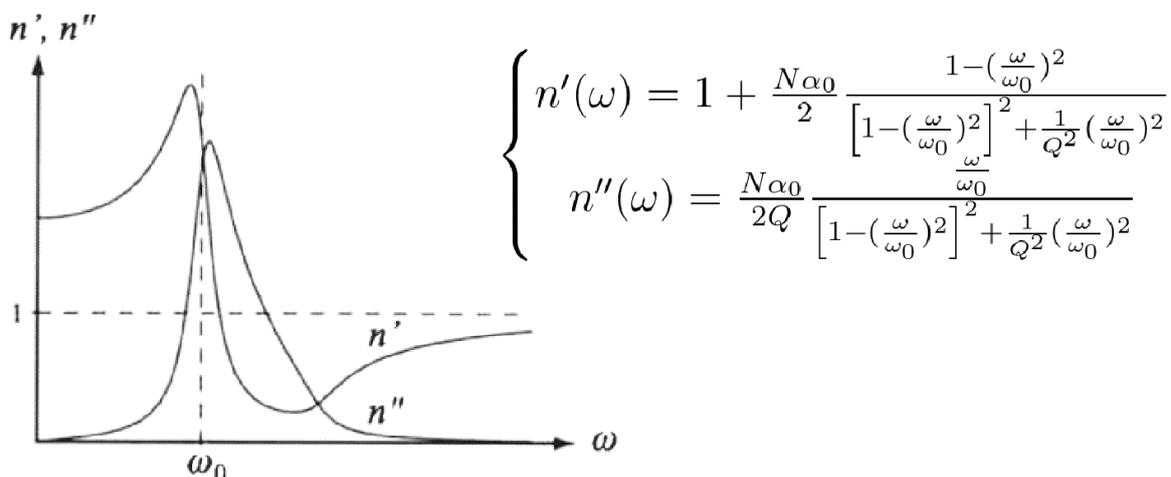
$$\chi_e(\omega) = \frac{N\alpha_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{N\alpha_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Et donc, en reprenant la forme  $\underline{n}(\omega) = n'(\omega) + in''(\omega)$ , on a, par un développement limité au premier ordre en  $N\alpha_0$ , comme  $n(\omega) = (\epsilon_r(\omega))^{1/2}$  :

$$\begin{cases} n'(\omega) = 1 + \frac{N\alpha_0}{2} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \\ n''(\omega) = \frac{N\alpha_0}{2Q} \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \end{cases}$$

### Indices optiques réel et imaginaire



Pour  $n'$ , on voit des zones de dispersion normale/anormale ( $n'$  augmente puis diminue avec  $\omega$ ),  $n'$  vaut environ 1 pour  $\omega = \omega_0$ . Pour  $n''$ , on voit une zone de transparence loin de  $\omega_0$  et d'absorption près de  $\omega_0$  sur une largeur  $\Delta\omega$ .

### b) Dispersion : loi de Cauchy

Si on travaille à des fréquences optiques, on a  $\omega \sim 10^{15} \text{rad.s}^{-1} \ll \omega_0 \sim 10^{17} \text{rad.s}^{-1}$ .  
On peut alors considérer que :

$$n(\omega) \simeq n'(\omega)$$

On est donc dans la zone de dispersion normale mentionnée plus tôt. Par un développement limité à l'ordre 1 en  $(\frac{\omega}{\omega_0})^2$  :

$$n(\omega) \simeq A + B\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = A + B'\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

### c) Absorption : loi de Beer-Lambert

On est cette fois-ci au maximum d'absorption  $\omega \simeq \omega_0$  :  $n' \simeq 1$  et  $n''(\omega) \simeq \frac{N\alpha_0 Q}{2} = \text{cste}$ .

Par définition :  $I(z) = \left\| \vec{E}(z, t) \right\|^2$

On a donc :

$$\begin{cases} I_0 = E_0^2 \\ I(l) = I_0 e^{-2\frac{\omega_0}{c} \frac{N\alpha_0 Q}{2} l} \end{cases}$$

On en déduit l'expression de l'absorbance  $A$  :

$$A = -\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \frac{N\alpha_0\omega_0 Q}{c \times \ln(10)} \times l$$

On peut relier  $N$  à la concentration de la solution  $N = N_A \times C$ , et on a alors :

$$A = \frac{N_A\alpha_0\omega_0 Q}{c \times \ln(10)} \times l \times C = \epsilon \times l \times C$$

On retrouve bien la loi de Beer-Lambert.

VII Propriétés macroscopiques des ferromagnétiques (voir [1], [9], [10], [11], [12])

# 1) Aimantation induite

## a) Rappels

On décrit la matière aimantée en utilisant l'hypothèse selon laquelle tout élément de volume  $dt$  d'un matériau aimanté possède un moment dipolaire magnétique  $d\vec{m}$ . On caractérise alors l'aimantation par un champ vectoriel, densité volumique de moment dipolaire, défini par :  $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dt}$ , en  $A.m^{-1}$ .

Ainsi pour décrire la matière on peut distinguer deux types de courants :

- Les courants de conduction, correspondant à des déplacements de charges libres sur des distances » distances interatomiques. On notera la densité de courants libres associée  $\vec{j}_l$
- Les courants d'aimantation  $\vec{j}_M$ , correspondant à des mouvements microscopiques de charges liées autour des noyaux des atomes, qu'on admet dériver du champ d'aimantation par la relation :  $\vec{j}_M = \text{rot}(\vec{M})$

Remarque : ces courants sont en général qualifiés de fictifs car ce ne sont pas des courants macroscopiques de porteurs de charges libres dans la matière, mais ils permettent de très bien représenter notre problème.

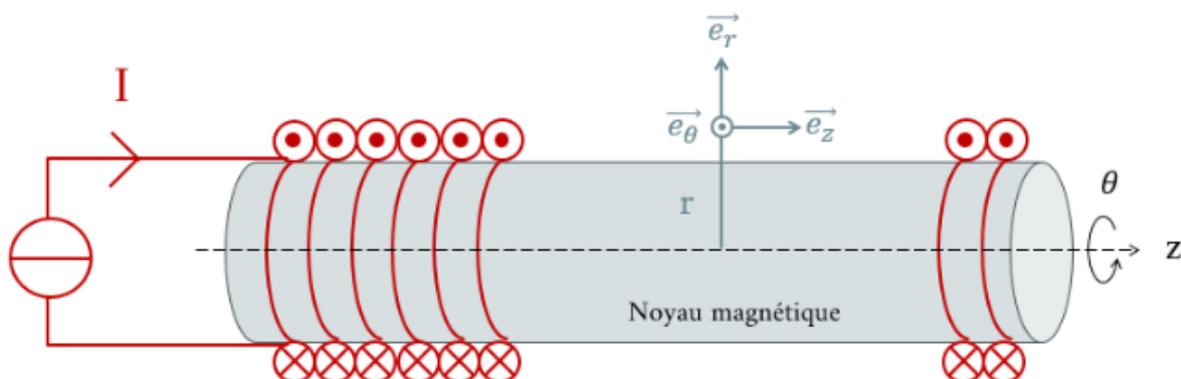
Sous l'effet d'un champ magnétique  $\vec{B}$ , il se crée des courants d'aimantation en réponse au champ appliqué, ces courants d'aimantation vont créer à leur tour un champ magnétique.

On a donc un couplage. On introduit alors un autre champ, noté  $\vec{H}$ , l'excitation magnétique, contrôlable par les courants libres qu'on applique. On a :  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

On voit déjà que la résolution de ce problème n'est pas évidente, et nécessite la connaissance de la réponse de la matière. Pour cela on va s'appuyer sur des observations expérimentales/macrosopiques.

## b) Introduction d'un milieu magnétique dans une bobine

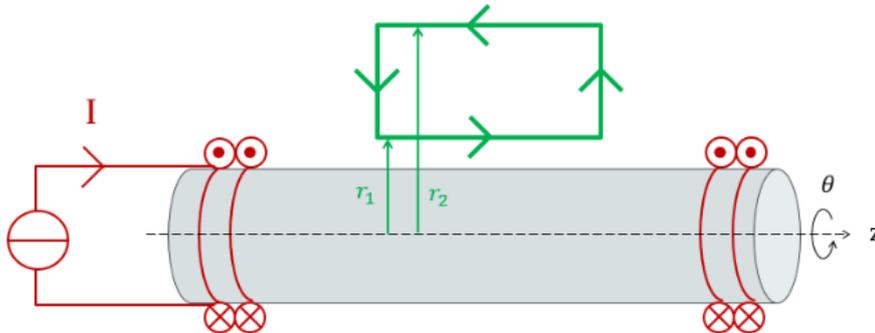
On considère un solénoïde avec un noyau magnétique éventuellement aimanté à l'intérieur.



On a  $n$  spires par unité de longueur de rayon  $a$ , et on néglige les effets de bord.

Le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , est un plan de symétrie pour les courants donc d'antisymétrie pour  $\vec{H}, \vec{B}, \vec{M}$ . En utilisant de plus les propriétés d'invariance par translation et rotation on obtient :  $\vec{H} = H(r)\vec{e}_z$ , de même pour les deux autres.

On va appliquer le théorème d'Ampère en prenant comme contour un rectangle dans un plan  $\theta = \text{cste}$ .

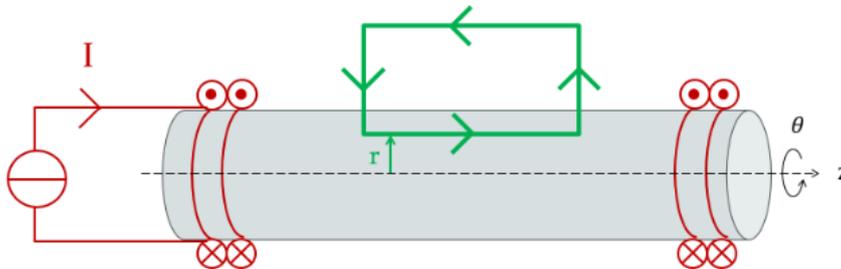


On obtient :

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = -H(r_2)L + H(r_1)L = I_{\text{libre, enlacc}} = 0$$

D'où  $H(r_1) = H(r_2)$  d'où  $\vec{H}_{\text{ext}} = \vec{0}$  uniforme. Puis  $\vec{M}_{\text{ext}} = \vec{0}$  car à l'extérieur pas de matière à aimanter. Puis  $\vec{B}_{\text{ext}} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \vec{0}$

Même chose avec le contour d'Ampère qui passe à l'intérieur du milieu :



$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = LH(r) = I_{\text{libre}}^{\text{enlacc}} = nLI$$

D'où  $\vec{H}_{\text{int}} = nI\vec{e}_z$  est uniforme.

Le barreau étant uniformément excité par  $\vec{H}$  il va s'aimanter uniformément  $\vec{M} = M\vec{e}_z$ .

Finalement à l'intérieur du barreau on a un champ magnétique :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0(nI + M)\vec{e}_z$$

On a ainsi une situation intéressante : si la matière s'aimante dans le sens de l'excitation (ie  $\vec{M}$  et  $\vec{H}$  sont dans le même sens), alors le champ magnétique est amplifié grâce à la présence du noyau. ( $B_{\text{sans, noyau}} = \mu_0 nI$ )

B est de l'ordre du mT. Pour des aimants néodymes, on peut avoir un champ qui va jusqu'à 1 T.

### c) Observation du ferromagnétisme

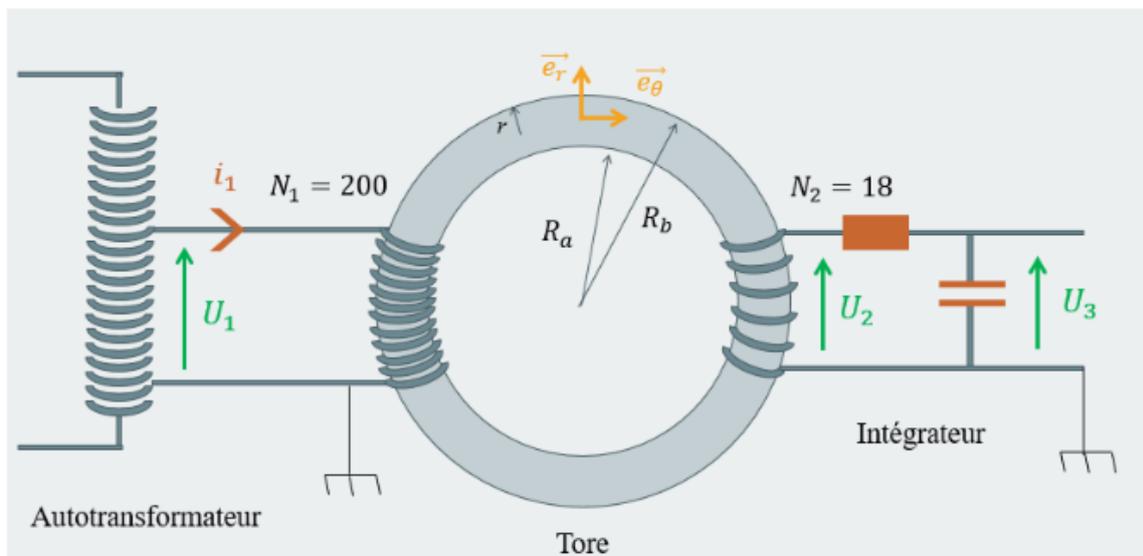
On désigne par ferromagnétisme la propriété qu'ont certains corps à s'aimanter très fortement sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, et très souvent de garder par la suite une aimantation importante même en champs nul. Ils sont devenus ce que l'on appelle couramment des aimants.

Ex : Fe, Ni, Co, certains alliages

Un matériau ferromagnétique confine le champ magnétique, s'aimante très fortement, peut présenter une aimantation non nulle pour  $\vec{H} = \vec{0}$  (aimant permanent), et d'une manière générale on observe que l'aimantation dépend du passé (voir phénomène d'hystérésis).

## 2) Phénoménologie du ferromagnétisme

On considère le montage suivant :



D'après le théorème d'Ampère,  $H = \frac{N_1 i_2}{2\pi R}$

D'après la loi de Faraday,  $B = \frac{RC}{N_2 S} U_3$

### a) Hystérésis

Partant de  $M=0$  et  $H=0$  on augmente  $H$ .  $M$  augmente alors et finit par saturer à  $M_{\text{sat}}$ . Pour ce qui est de  $B$ , il ne sature pas mais monte jusqu'à  $\mu_0 M_{\text{sat}}$  en ordre de grandeur.

Ensuite on fait varier  $H$  de manière périodique. Lorsque  $H$  diminue, pour  $H = 0$  on garde les valeurs rémanentes/résiduelles  $M_r$  et  $B_r$ .  $M$  s'annule pour  $-H_c'$  et  $B$  s'annule pour  $-H_c$ , il s'agit de l'excitation coercitive. Pour  $H$  négatif est très grand en valeur absolue, on sature à nouveau. Puis  $H$  augmente et on obtient la courbe symétrique par rapport à l'origine. Finalement, on obtient le cycle d'hystérésis.

On distingue alors deux types de ferromagnétiques :

- Ferromagnétiques doux, pour lesquels le cycle est étroit,  $H_c < 10\text{-}100 \text{ mA}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $B_r$  est faible, ils sont utilisés pour les systèmes dont l'aimantation doit pouvoir se retourner facilement (ex : transformateurs).
- Ferromagnétiques durs, pour lesquels le cycle est large,  $H_c > 10^3\text{-}10^4 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$ , ils sont adaptés pour réaliser des aimants permanents.

Pour les ferromagnétiques durs, la susceptibilité dépend de  $\vec{H}$ , ils sont donc difficiles à modéliser. On va se concentrer sur des matériaux doux.

## b) Modélisation d'un milieu doux

On néglige l'hystérésis et on a une modélisation affine par morceaux. On distingue le régime saturé et le régime linéaire.

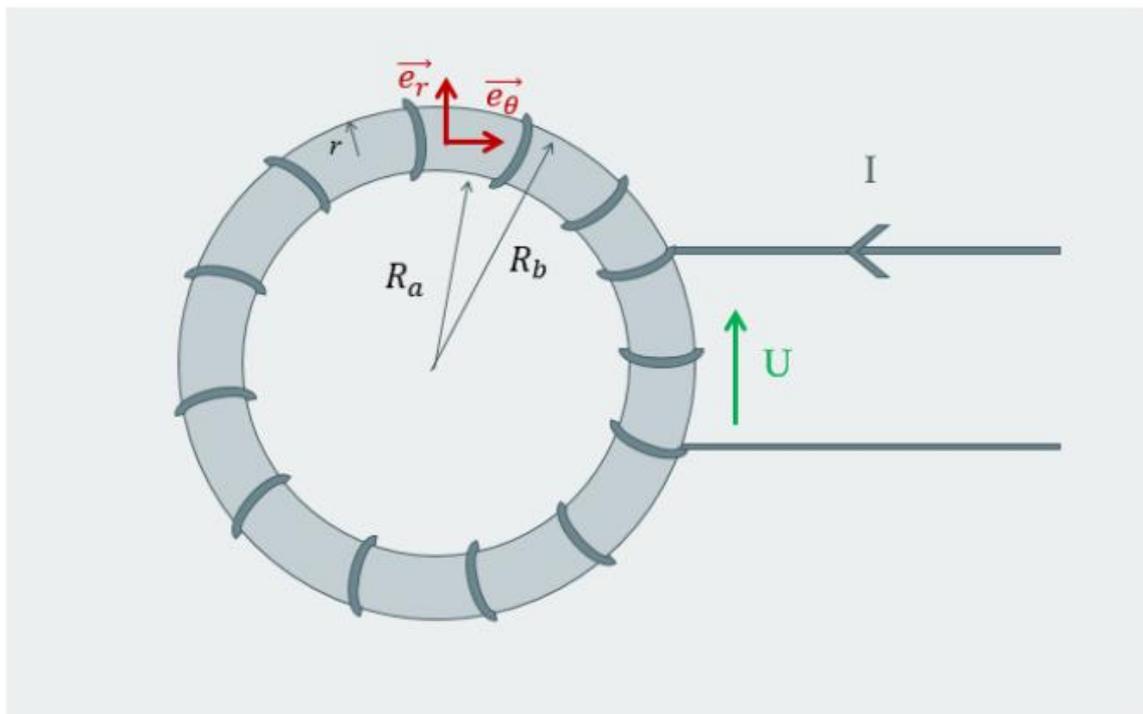
Dans le vide :  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Avec un aimant :  $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

La perméabilité relative peut atteindre des valeurs de l'ordre de 1000. Il apparaît qu'on ne pourra jamais faire de moteurs avec du cuivre par exemple...

## 3) Application : bobine torique à noyau de fer doux

### a) Modèle



On a un enroulement de  $N$  spires sur un noyau torique de section  $S$  et de longueur moyenne  $l \approx \sqrt{S}$

- $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  plan de sym pour les courants donc d'anti-sym pour tous nos champs donc ils sont tous selon  $\vec{e}_\theta$
- On applique le théorème d'ampère à l'intérieur du tore sur un cercle de rayon  $r$  on obtient  $H = \frac{Ni}{2\pi r}$ . Comme  $l = \sqrt{S}$  on peut considérer que  $2\pi r = l = cste$  à l'intérieur du tore, d'où  $H = \frac{Ni}{l}$  uniforme sur une section, donc le noyau s'aimante uniformément
- Modèle simple d'un milieu doux linéaire : alors  $B = \mu_0\mu_r H$
- Le flux magnétique propre de la bobine s'écrit alors  $\phi_B = NSB = NS\mu_0\mu_r \frac{Ni}{l} = Li$  où on identifie l'inductance propre. Par rapport au vide,  $L$  est multiplié par  $\mu_r$  qui est de l'ordre de 1000
- La fem induite s'écrit alors  $e = -\frac{d\phi_B}{dt}$
- En notant  $r$  la résistance du circuit cuivre on peut écrire  $U = ri - e = ri + L\frac{di}{dt}$
- On a toujours l'expression de l'énergie mag stockée  $E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2$  : on voit qu'elle est très élevée, multipliée par 1000 !!!

## b) Étude des pertes (**À COMPLÉTER**)

Les pertes d'un ferromagnétique sont les pertes par effet Joule (dites pertes cuivre) et les pertes par hystérésis + par courants de Foucault (dites pertes fer).

## c) Application au transformateur (**À COMPLÉTER**)