COMPTE RENDU DE LECON DE PHYSIQUE

LP 31 : Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat

Yann MONCEAUX et Cédric BLAIZE

Table des matières

Niveau : L3

Prérequis :

- Notions d'optique géométrique
- Intégrale curviligne
- Équations d'Euler-Lagrange

Introduction

Les cours d'introduction à l'optique géométrique consistent généralement à poser et apprendre un ensemble de lois qui régissent la propagation des rayons lumineux, comme celles de Snell-Descartes par exemple, ce qui peut être assez fastidieux.

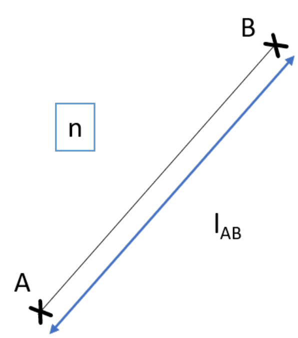
Au cours de cette leçon nous verrons qu'en introduisant le principe de Fermat nous pouvons démontrer ces lois, ce qui permet non seulement de les comprendre, mais également de remarquer à quel point elles sont liées, car découlant du même principe, et qu'elles ne forment pas simplement un ensemble de lois dont le seul rapport serait de décrire le comportement de la lumière.

1 Principe de Fermat

1.1 Énoncés du principe de Fermat

1.1.1 Notion de chemin optique

Avant d'énoncer le principe de Fermat, nous allons faire un rappel sur la notion de chemin optique qui est nécessaire à sa compréhension.



Soit un rayon lumineux parcourant le trajet (AB) dans un milieu d'indice optique n. Son temps de parcours est t_{AB} tel que $t_{AB} = \frac{l_{AB}}{v}$ où v est la vitesse de la lumière dans ce milieu, i.e $v = \frac{c}{n}$. On a donc $t_{AB} = \frac{n \times l_{AB}}{c}$.
On définit alors le chemin optique par $L_{AB} = n \times l_{AB}$, soit $L_{AB} = c \times t_{AB}$. Le chemin optique est donc la longueur qu'aurait parcouru la lumière pendant la durée t_{AB} si elle se propageait dans le vide.

Dans le cas précédent on a fait l'hypothèse implicite qu'on était dans un milieu homogène. Dans le cas général, le chemin optique entre A et B est défini par :

$$L_{AB} = \int_A^B n \,\mathrm{d}l$$

où *dl* est un élément infinitésimal d'abscisse curviligne le long de la courbe entre A et B, l'indice optique n pouvant varier le long de cette courbe.

1.1.2 Premier énoncé du principe de Fermat (1657)

La lumière se propage d'un point à un autre de manière à minimiser le temps de trajet

Si ce principe est bien vérifié pour de nombreux élements dont :
— Miroir plan
— Miroir convexe

Il est parfois mis en défaut, dans le cas du *miroir parabolique* par exemple.

1.1.3 Second énoncé du principe de Fermat

Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B correspond à une valeur stationnaire du chemin optique par rapport aux trajets fictifs voisins allant de A à B

On peut remarquer que le premier énoncé du principe de Fermat est un cas particulier du second, car minimum est un cas particulier de stationnaire. Stationnaire peut exprimer minimum ou maximum (donc extrêmal) mais également constant, voire un point col.
Le second énoncé est donc plus général, c'est lui qu'il faut retenir, et que nous utiliserons dans la suite.

1.2 Conséquences directes du principe de Fermat

1.2.1 Retour inverse de la lumière

Soit deux points A et B. On considère le chemin que parcourt la lumière pour aller de A à B, de chemin optique L_{AB}.

$$L_{AB} = \int_A^B n \,\mathrm{d}l = -\int_B^A n \,\mathrm{d}l = \int_B^A n\,(-\mathrm{d}l) = \int_B^A n \,\mathrm{d}l'$$

où *dl* est l'élément d'abscisse curviligne en allant de A à B. $dl' = -dl$ est l'élément d'abscisse curviligne en allant de B à A. Par conséquent :

$$L_{AB} = L_{BA}$$

Si L_{AB} est stationnaire, alors L_{BA} l'est également. La lumière va donc passer par le même chemin pour aller de B à A que pour aller de A à B. C'est le principe de retour inverse de la lumière.

1.2.2 Propagation dans un milieu homogène

Dans un milieu homogène, n est constant. Par conséquent le chemin optique entre deux points A et B est

$$L_{AB} = \int_A^B n\,\mathrm{d}l = n \int_A^B \mathrm{d}l$$

L_{AB} stationnaire revient donc à dire que $\int_A^B \mathrm{d}l$ est stationnaire. Cela n'est possible que si la courbe entre A et B est une ligne droite. Dans un milieu homogène, la lumière se propage donc rectilignement.

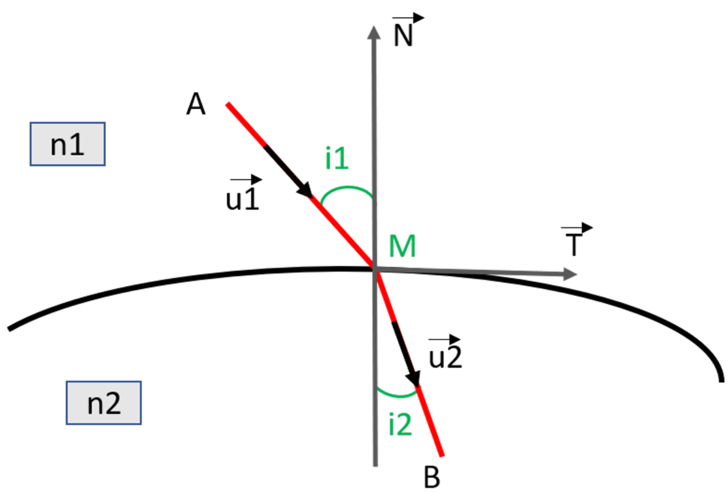
2 Interfaces

Maintenant que nous connaissons la propagation d'un rayon lumineux dans un milieu homogène, nous allons pouvoir complexifier un peu la situation en s'intéressant à ce qui se passe à une interface, en considérant toujours des milieux homogènes.

2.1 Lois de Snell-Descartes

• Lois de la réfraction :

On considère la situation d'un dioptre séparant deux milieux homogènes d'indices n1 et n2.

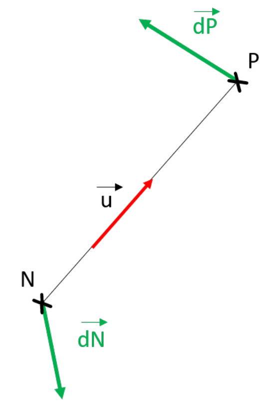


La lumière va de A à B, en se réfractant sur le dioptre en M. Les points A et B sont fixes. On note $\overrightarrow{u1}$ et $\overrightarrow{u2}$ les vecteurs directeurs unitaires de AM et MB. $\overrightarrow{N}$ est selon la normale au dioptre et $\overrightarrow{T}$ selon sa tangente. On note i1 l'angle (algébrique) entre AM et la normale au dioptre, ainsi que i2 celui entre MB et la normale au dioptre

Le chemin optique peut se décomposer en $L_{AB} = n1 \times AM + n2 \times MB$.
L_{AB} stationnaire signifie que dL_{AB} est nul à l'ordre 1 (en dM)
Soit $dL_{AB} = n1 \times dAM + n2 \times dMB = 0$

Pour calculer dL_{AB}, faisons un rappel mathématique :

On considère un segment [NP], de vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{NP}}{NP}$



On déplace légèrement les points N et P de vecteurs élémentaires $\overrightarrow{dN}$ et $\overrightarrow{dP}$ respectivement.
La variation de longueur du segment [NP] est $dNP = \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{dP} - \overrightarrow{dN})$

On peut appliquer cela aux segments AM et MB. On en déduit :

$$dL_{AB} = n1 \times \overrightarrow{u1}.(\overrightarrow{dM} - \overrightarrow{dA}) + n2 \times \overrightarrow{u2}.(\overrightarrow{dB} - \overrightarrow{dM})$$

Comme les points A et B sont fixes, $\overrightarrow{dA} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{dB} = \overrightarrow{0}$

On a donc :

$$dL_{AB} = (n1 \times \overrightarrow{u1} - n2 \times \overrightarrow{u2}).\overrightarrow{dM} = 0$$

Comme $\overrightarrow{dM}$ est dans le plan tangent au dioptre, on en déduit que $(n1 \times \overrightarrow{u1} - n2 \times \overrightarrow{u2}) = \alpha \times \overrightarrow{N}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$

On obtient la première loi de Descartes pour la réfraction : **le rayon réfracté appartient au plan d'incidence ($\overrightarrow{u1}$,$\overrightarrow{N}$).**

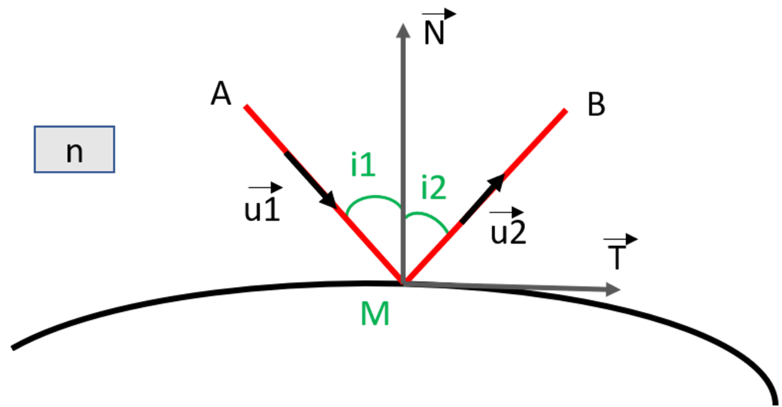
En prenant le produit scalaire de cette expression avec $\overrightarrow{T}$ tangent au dioptre dans le plan d'incidence, on a : $(n1 \times \overrightarrow{u1} - n2 \times \overrightarrow{u2}).\overrightarrow{T} = \alpha \times \overrightarrow{N}.\overrightarrow{T} = 0$
Soit $n1 \times \overrightarrow{u1}.\overrightarrow{T} = n2 \times \overrightarrow{u2}.\overrightarrow{T}$

On obtient alors la seconde loi de Descartes pour la réfraction :

$$\boxed{n1 \times sin(i1) = n2 \times sin(i2)}$$

• Lois de la réflexion :

On considère maintenant la situation suivante : dans un milieu d'indice n, un rayon lumineux émis en un point A va en B (A et B fixes), en étant réfléchi sur un dioptre en M.



On note à nouveau $\overrightarrow{u1}$ et $\overrightarrow{u2}$ les vecteurs directeurs unitaires de AM et MB. $\overrightarrow{N}$ est toujours selon la normale au dioptre et $\overrightarrow{T}$ selon sa tangente. De même i1 l'angle (algébrique) entre AM et la normale au dioptre, ainsi que i2 celui entre MB et la normale au dioptre

Le chemin optique s'écrit ici $L_{AB} = n(AM + MB)$, donc la condition de stationnarité s'écrit $dL_{AB} = n(dAM + dMB) = 0$, soit $dAM + dMB = 0$.

On développe dAM et dMB de la même façon que précedemment, d'où (en se rappelant que A et B sont fixes) :

$$(\overrightarrow{u1} - \overrightarrow{u2}).\overrightarrow{dM} = 0$$

$\overrightarrow{dM}$ étant dans le plan tangent au dioptre, on obtient que $\overrightarrow{u1} - \overrightarrow{u2} = \alpha' \times \overrightarrow{N}$ avec $\alpha' \in \mathbb{R}$

On en déduit la première loi de Descartes pour la réflexion : **le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence ($\overrightarrow{u1}$,$\overrightarrow{N}$)**.

En prenant le produit scalaire de cette expression avec $\overrightarrow{T}$ tangent au dioptre dans le plan d'incidence, on a : $(\overrightarrow{u1} - \overrightarrow{u2}).\overrightarrow{T} = \alpha' \times \overrightarrow{N}.\overrightarrow{T} = 0$
Soit $\overrightarrow{u1}.\overrightarrow{T} = \overrightarrow{u2}.\overrightarrow{T}$, i.e $sin(i1) = -sin(i2)$

On obtient alors la seconde loi de Descartes pour la réflexion :

$$\boxed{i1 = -i2}$$

Nous avons donc pu complétement obtenir les lois de Descartes à partir du principe de Fermat. On peut remarquer que lors de ces démonstrations, nous n'avons utilisé que l'hypothèse de stationnarité, et non de minimum. Nous allons justement traiter un cas de réflexion, où le chemin optique n'est pas minimum.

2.2 Le miroir parabolique

Un miroir parabolique est défini par une surface de la forme $y = Kx^2$.
On s'intéresse au trajet optique parcouru par la lumière émise en un point A situé à l'intérieur d'un miroir parabolique, reçu en un point B symétrique de A par rapport à l'axe de révolution.

Présentation du programme python qui trace le rayon lumineux, dans lequel on peut changer l'abscisse du point de réflexion. A l'aide de la loi de Descartes sur la réflexion, montrer qu'on a à priori 3 points de réflexion possibles, puis en traçant la valeur du chemin optique en fonction de l'abscisse du point de réflexion, montrer qu'il y a effectivement 3 chemins possibles, dont 2 correspondent à des minimums, mais 1 à un maximum

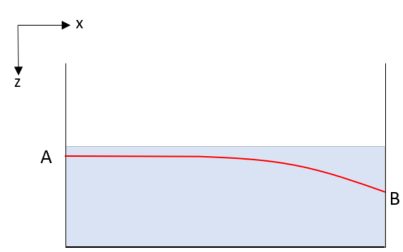
On voit donc la nécessité du second énoncé du principe de Fermat, car un des chemins possible pour le miroir parabolique correspond à un maximum, qui est un cas non pris en compte par le premier énoncé. On aurait pu également choisir de traiter le cas du miroir elliptique, où tous les trajets entre les deux foyers sont possibles, et de longueurs égales.

3 Milieux inhomogènes

3.1 Mirage et cuve à gradient d'indice

Nous nous sommes intéressés jusqu'ici à des milieux homogènes, dans lesquels la lumière se propage rectilignement. Ce n'est plus le cas si on considère des milieux où l'indice varie, et nous allons voir comment on peut appliquer le principe de Fermat dans ces cas.
Des phénomènes très connus dûs aux variations d'indice optique sont les mirages, qu'on peut notamment observer en été lorsqu'il fait très chaud. Nous allons essayer de les comprendre et pour ça nous allons commencer par étudier le cas d'un système simple, la cuve à gradient d'indice.

Présenter la cuve et allumer le laser (préparer le montage des éléments en avance et éteindre la lumière devrait permettre de voir quelque chose). Eventuellement prendre des photos en préparation pour les projeter sur diapo. Illustre la propagation non rectligne, et de côté, illustre le phénomène de mirage (on a l'impression que le faisceau laser provient d'au dessus de la cuve)



Comme l'indice optique dépend de la densité, et que cette dernière ne dépend (à priori) que de la profondeur dans la cuve, on suppose que $n = n(z)$

Le chemin optique est :

$$L_{AB} = \int_A^B n \, \mathrm{d}s \tag{1}$$
$$= \int_A^B n(z)\sqrt{dz^2 + dx^2} \tag{2}$$
$$= \int_A^B n(z)\sqrt{1 + (\frac{dx}{dz})^2} \, \mathrm{d}z \tag{3}$$

En notant $x = x(z)$ et $x' = \frac{dx}{dz}$

$$L_{AB} = \int_A^B f(x, x', z) \, \mathrm{d}z$$

avec $f(x, x', z) = n(z)\sqrt{1 + x'^2}$

Le chemin optique apparaît comme une fonctionnelle, on cherche les chemins stationnaires (tels que $dL_{AB}[f] = 0$), pour trouver ces chemins on peut donc appliquer Euler-Lagrange.

Equation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dz}[\frac{\partial}{\partial x'}(n(z)\sqrt{1 + x'^2})] = \frac{\partial}{\partial x}(n(z)\sqrt{1 + x'^2})$$
$$\frac{d}{dz}[n(z)\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}}] = 0$$
$$n(z)\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = C = cste$$

En réecrivant x'

$$n(z)\frac{dx}{ds} = C$$

En considérant l'angle i que forme le rayon avec la verticale (ou la normale à l'horizontale) :

$$\boxed{n(z)sin(i(z)) = C}$$

Cela explique la courbure du rayon, car n va varier avec la profondeur, donc l'angle également. On note aussi que n augmente avec la profondeur donc l'angle diminue, ce qui signifie que le rayon devient de plus en plus vertical, ce qui est bien ce qui est observé expérimentalement.

présentation schéma mirage, et explique par analogie avec la cuve. Montre que le mirage vu sur la route, interprété comme une flaque d'eau est en fait une partie du ciel vu sur la route !

3.2 Équation des rayons

Si la situtation précédent semble déjà plus compliquée, on peut remarquer qu'on était dans un cas à 2D, où l'indice optique ne dépendait que d'une de ces dimensions. Comment faire dans le cas général ?
On va appliquer Euler-Lagrange encore, mais pour $n(x, y, z)$. Le chemin optique est :

$$L_{AB} = \int_A^B n(x, y, z)\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Si on choisit par exemple d'intégrer sur x :

$$L_{AB} = \int_A^B n(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}x$$

Où $y' = \frac{dy}{dx}$ et $z' = \frac{dz}{dx}$

Soit

$$L_{AB} = \int_A^B f_1(x,y,y',z,z')\,\mathrm{d}x$$

avec $f(x,y,y',z,z') = n(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}$

On peut en déduire deux équations d'Euler-Lagrange, selon y et selon z. On va illustrer avec celle sur y.

$$\frac{d}{dx}[\frac{\partial}{\partial y'}(n(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2})] = \frac{\partial}{\partial y}(n(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2})$$

$$\frac{d}{dx}[n(x,y,z)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}] = \frac{\partial}{\partial y}(n(x,y,z)) \times \sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

$$\frac{d}{ds}[n(x,y,z)\frac{dy}{ds}] = \frac{\partial}{\partial y}(n(x,y,z))$$

On peut obtenir la même équation selon z. En repartant de l'intégrale, si on sort dy ou dz de la racine, on peut obtenir la même équation selon x.
En les sommants vectoriellement, on obtient :

$$\boxed{\frac{d}{ds}[n\frac{\overrightarrow{dr}}{ds}] = \overrightarrow{grad}(n)}$$

C'est l'équation des rayons lumineux.

Remarques :

— On peut retrouver cette équation à partir de l'équation eikonale, obtenue par les équations de Maxwell.
— On retrouve bien les cas traités précedemment (cuve à gradient d'indice, propagation dans un milieu homogène,...) à partir de l'équation des rayons lumineux en y injectant la forme de l'indice optique partiulière au cas traité.

Conclusion

Au cours de cette leçon on aura montré qu'on peut retrouver les lois de l'optique géomètrique à partir du principe de Fermat, qui se situe donc à sa base. On pourrait en fait démontrer le principe de Fermat à partir de l'éléctromagnétisme, qui apparaîtrait alors plus comme un théorème qu'un principe.

Le principe de Fermat est un principe variationnel. Cette leçon illustre leur importance en physique, car les principes variationnels permettent de retrouver de nombreuses propriétés dans une variété de domaines, en mécanique analytique par exemple, ou encore en relativité générale.

Choix pédagogiques

— Au cours de cette leçon on applique le principe de Fermat à différents cas, et si le principe est unique, les façons de l'appliquer sont multiples. J'ai essayé d'utiliser différentes méthodes (assez mathématique pour Snell-Descartes, numérique pour le miroir parabolique, Euler-Lagrange pour les milieux inhomogènes...) pour l'illustrer.

— J'ai choisi de monter progressivement en difficulté (On aurait par exemple pu traiter l'équation des rayons lumineux avant la cuve à gradient d'indice et avoir ce dernier cas comme une illustration de l'équation des rayons. Néanmoins il m'a semblé plus simple pour la compréhension d'introduire l'utilisation d'Euler-Lagrange pour le chemin optique sur un cas particulier pour commencer)

Questions

— **Quel théorème de l'optique démontre-t-on généralement avec le principe de Fermat ?**
Le théorème de Malus

— **"Variation du chemin optique nulle à l'ordre 1", c'est un ordre 1 par rapport à quoi ?**
En le déplacement élémentaire de la trajectoire

— **Pourquoi l'indice optique varie avec la densité ?**
Théorème de Gladstone

— **Quelles hypothèses sur l'indice et l'amplitude de E permettent de se placer dans l'approximation de l'optique géométrique ?**
Variation lentes

— **démonstration du rappel mathématique**

— **autre démonstration des lois de Descartes ?**
Relation de passage en électromag

— **Quelle est la variable qu'on va "stationnariser" ?**
La trajectoire

— **Peut-on déduire les équations de Maxwell à partir d'un principe variationnel ?**
Oui, avec un lagrangien bien choisi

Remarques

Lors des équations d'Euler-Lagrange pour l'équation des rayons, il est possible de poser un paramètre u par exemple et d'écrire $L_{AB} = \int_A^B n(x,y,z)\sqrt{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2 + (\frac{dz}{du})^2}\,du$ ce qui permet directement d'en déduire les trois équations souhaitées.

La leçon est assez mathématique, c'est normal. Il faut essayer de se rattacher à des choses relativement simples et physiques pour ne pas faire que des maths (ne pas faire plus compliqué que ça mathématiquement).

Bibliographie

BFR d'optique (chap.6)
Champeau
Portelli physique par la pratique

https ://femto-physique.fr/optique/principe-de-fermat.php